Mathematische Logik & Mengenlehre

XV

8.6.21

Fünfzehnte Vorlesung

VOLLSTÄNDIGE INDUKTION

$$\forall Z \subseteq A \ (\emptyset \in Z \wedge \forall x (x \in Z \to S(x) \in Z) \Longrightarrow Z = A)$$

ORDNUNGSINDUKTION

$$\forall Z \subseteq A \ (\forall x (\forall y \ y \leq x \to y \in Z) \to x \in Z) \Longrightarrow Z = A$$

PRINZIP DES KLEINSTEN ELEMENTS

$$\forall Z \subseteq A \ (Z \neq \emptyset \Longrightarrow \exists m \ [m \in Z \wedge \forall y (y \leq m \to y \notin Z)]$$

GS: Vollst. Ind. + Ordnungsind. nicht i.a. äquivalent.

Zermelo-Mengenlehre Z reicht für die Rekonstruktion der konkreten Mathematik aus

Jetzt: die beiden Protagonisten der Mengenlehre

ORDINALZAHLEN / KARDINALZAHLEN

Ebbinghaus: VI Fundierte Strukturen & Ordinalzahlen

(a, r) wobei $r \subseteq a \times a$

1.1 Definition. $r[u] := \{v \in \mathrm{Def}(r) \mid vru\}$.

DIE MENGE DER r-VORGÄNGER VON u

1.2 Definition. Die Relation r *ist fundierte Relation über* der Menge a und (a, r) *ist eine fundierte Struktur* $:\leftrightarrow$ (a, r) ist eine binäre Struktur, in der die folgende Variante des Prinzips vom kleinsten Element gilt:

$$\forall b \, (\underbrace{\emptyset \neq b}_{2} \wedge \underbrace{b \subseteq a}_{1} \to \exists u \, (u \in b \wedge \boxed{b \cap r[u] = \emptyset})\,, \quad (*)$$

d. h. jede nicht leere Teilmenge von a besitzt ein r-minimales Element.

Erinnerung

$$\forall \underbrace{Z \subseteq A}_{1} \, (\underbrace{Z \neq \emptyset}_{2} \Rightarrow \exists x \, (x \in Z \wedge \underbrace{\boxed{\forall y \, (y < x \longrightarrow y \notin Z)}}_{3}))$$

Vgl. mit (*)

<u>Def.</u> Eine Struktur (A, R) heißt **Wohlordnung** falls R fundiert ist und (A, R) eine Ordnung i. S. v. $<$ ist.

<u>Bsp.</u> ① $(\mathbb{N}, <)$ sind eine Wohlordnung.

② Falls (A, R) eine Wohlordnung ist und $B \subseteq A$, so ist (B, R') eine Wohlordnung.

$R' := R \cap B \times B$

$\Longrightarrow$ Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $(n, <)$ eine Wohlordnung.

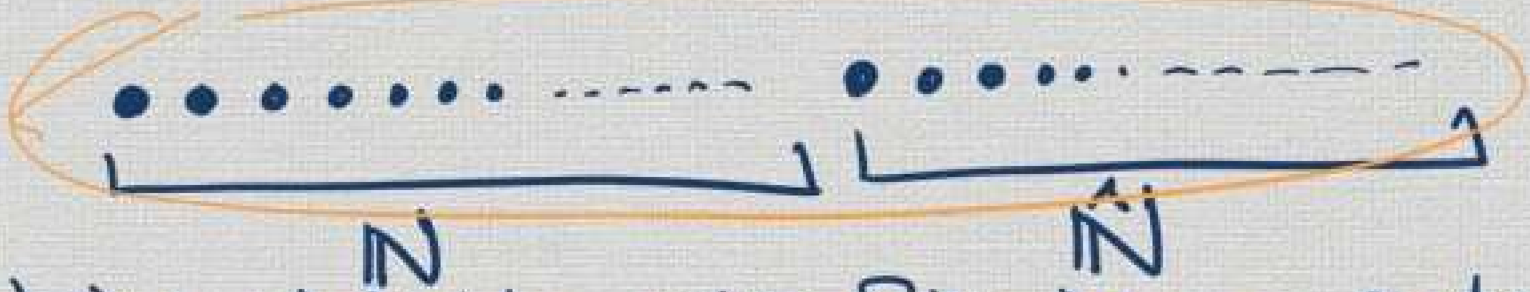
Bsp ③ Die Ordnung $(\mathbb{N},<)\oplus(\mathbb{N},<)$ aus G8 ist eine Wohlordnung.

1. $(\mathbb{N},<)\oplus(\mathbb{N},<)$ ist eine Ordnung im Sinne von $<$.
2. Sei $B\subseteq \mathbb{N}\cup\hat{\mathbb{N}}$ mit $B\neq\emptyset$.

Fall 1. $B\cap\mathbb{N}\neq\emptyset$. Dann ist $B\cap\mathbb{N}\subseteq\mathbb{N}$ und hat somit
nichtleer
ein kleinstes Elt. $b\in B$.
Aber dies ist ein kl. Elt. von ganz B, da alle Elte von $B\cap\hat{\mathbb{N}}$ echt größer sind als b.

Fall 2. $B\cap\mathbb{N}=\emptyset. \Longrightarrow B\subseteq\hat{\mathbb{N}}$.
Somit ex. $b\in\hat{\mathbb{N}}\cap B$ mit b ist kleinster Elt. von $B\cap\hat{\mathbb{N}}=B$.

G8.



Dies ist keine abstrakte, eigenartige Menge, sondern ist z.B. ordnungsisomorph zu

$$\left\{1-\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}\cup\left\{2-\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}\subseteq\mathbb{Q}$$

<u>Theorem</u> Sei $(A,<)$ eine Ordnung i.S.v. $<$

Dann sind äquivalent:

(i) $(A,<)$ erfüllt das Prinzip der Ordnungsinduktion

(ii) $<$ ist fundiert

<u>Beweis</u> (i) $\Rightarrow$ (ii)

Ang. $Z \subseteq A$ mit $Z \neq \emptyset$.

Für einen Wid. nehmen wir an, Z hätte kein kleinstes Element.

Beh. $A \setminus Z$ ordnungsinduktiv.

[Falls gezeigt $\Rightarrow A \setminus Z = A \Rightarrow Z = \emptyset$]

Sei x beliebig

Ang. $\boxed{<[x] \subseteq A \setminus Z}$

Wäre $\underline{x \notin A \setminus Z}$, so $\boxed{x \in Z}$ $\Big\} \Rightarrow$ x ist $<$-kleinstes Elt. von Z.

$$\underset{\substack{\text{Wid. zur} \\ \text{Ann. kein} \\ \text{kl. Elt.}}}{\Longrightarrow} x \in A \setminus Z.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sei $Z \subseteq A$ ordnungsinduktiv,

also: $\forall x \, (<[x] \subseteq Z \longrightarrow x \in Z)$ (*)

Für Widerspruch nehmen wir an: $Z \neq A$

$$\Longrightarrow A \setminus Z \neq \emptyset$$

Somit ex. $\underline{m \in A \setminus Z}$ minimal. $<[m] \subseteq Z \underset{(*)}{\Longrightarrow} m \in Z$ ↯ q.e.d.

Bem.

Dieser Beweis verwendet an keiner Stelle, daß $<$ eine Ordnung i.S.v. $<$ ist. Wir haben also eigentlich den folgenden Satz gezeigt:

Sei A eine Menge, R eine binäre Relation auf A.
Dann sind äquivalent:

(i) R ist fundiert

(ii) (A, R) erfüllt das Prinzip der Ordnungsinduktion

$$\forall Z \left(Z \subseteq A \longrightarrow \left[\forall x \left(R[x] \subseteq Z \longrightarrow x \in Z \right) \longrightarrow Z = A \right] \right).$$

Somit können wir auf einer beliebigen fundierten Struktur Aussagen über Ordnungsinduktion beweisen.

1.6 Definition. (i) b ist ein *Anfangsstück* von a bzgl. r

$:\leftrightarrow \quad r \subseteq a \times a \wedge b \subseteq a \wedge \forall u\,(u \in b \rightarrow r[u] \subseteq b)$.

(ii) (b, s) ist ein *Anfangsabschnitt* von (a, r)

$:\leftrightarrow \quad b$ ist Anfangsstück von a bzgl. r und $s = r \cap (b \times b)$.

(a, r) mit $r \subseteq a \times a$

d.h.

$$\boxed{\forall u\,(u \in b \rightarrow \forall v\,(v r u \rightarrow v \in b))}$$

Ein AS $b \subseteq a$ heißt echtes AS, falls $b \neq a$.

Eigenschaften

(1) Falls r transitiv ist, so ist für jedes $x \in a$ $\quad r[x]$ ein Anfangsstück von a.

(2) Falls r irreflexiv ist, so ist für jedes x, $\quad r[x] \neq a$.

(3) D.h. falls r Ordnung i.S.v. $<$ ist, so ist $r[x]$ immer ein echtes AS von a.

Bem. I.a. kann es echte AS geben, die nicht von dieser Form sind.

Bsp. $(\mathbb{Q}, <)$ $\quad A := \{x;\ x < 0$ oder $x^2 < 2\}$

echtes Anfangsstück

Es ex. kein $q \in \mathbb{Q}$ mit $A = <[q]$.

④ Falls (a, r) eine Wohlordnung ist, so gilt:

$b \subseteq a$ ist echtes AS von a

$\Longleftrightarrow$

es ex. $x \in a$ mit $b = r[x]$.

[$\Longleftarrow$ Folgt aus ③.

$\Longrightarrow$ Ang. b ist AS und $b \neq a$.
D.h. $a \setminus b \neq \emptyset$. Sei u ein kleinstes Elt. von $a \setminus b$, d.h.

$u \in a$, $u \notin b$, $r[u] \subseteq b$.

Beh. $r[u] = b$. Wid. Wid.

Sei $x \in b \Longrightarrow x \, r \, u \vee x = u \vee u \, r \, x$
(Trichotomie)

$x = u \Rightarrow u \in b$. ✗

$u \, r \, x \xrightarrow{b \text{ AS}} u \in b$ ✗

$\Longrightarrow x \in r[u]$.]

⑤ Anfangsabschnitte von Wohlordnungen sind Wohlordnungen.

⑥ Seien (A, R), (A', R') zwei Wohlordnungen und $f: A \longrightarrow A'$ ein Isomorphismus.

Sei $B \subseteq A$ ein AS, dann ist $(B, R) = (B, R \cap B \times B)$ eine Wohlordnung nach ⑤ und

$$f \upharpoonright B : B \longrightarrow \text{Bild}(f \upharpoonright B) \subseteq A'$$

Dann ist $\text{Bild}(f \upharpoonright B)$ ein AS von A'.

[Ang. nicht. Es gibt $x R' y$, $x, y \in A'$ mit $x \notin \text{Bild}(f \upharpoonright B)$
$y \in \text{Bild}(f \upharpoonright B)$.

Da f Iso war, ex. ein $a \in A$ [genauer $a \in A \setminus B$]

mit $x = f(a)$.

Da B ein AS war, wissen wir daß f.a. $b \in B$ bRa

Finde b mit $y = f(b)$.

Dann gilt bRa $f(a) = x R' y = f(b)$.

Also ist f nicht ordnungserhaltend.]

FUNDAMENTALSATZ ÜBER WOHLORDNUNGEN

Seien (A,R) & (B,S) Wohlordnungen. Dann ist

(i) (A,R) isomorph zu einem Anfangsabschnitt von (B,S)

ODER

(ii) (B,S) isomorph zu einem Anfangsabschnitt von (A,R).

EBBINGHAUS VI Satz 1.9

HILFS-SATZ

1.8 Korollar. (i) *Zwischen zwei Wohlordnungen gibt es höchstens einen Isomorphismus.*
(ii) *Es gibt keinen Isomorphismus von einer Wohlordnung auf einen ihrer echten Anfangsabschnitte.*
(iii) *Wohlordnungen sind starr,* d. h. *sie besitzen außer der Identität keinen Automorphismus,* d. h. *keinen Isomorphismus auf sich selbst.* ⊣

Technischer Hilfssatz (TH)

Ang. (A,R), (B,S) seien Wohlordnungen und $B_0, B_1 \subseteq B$ sind zwei AS von B.

Sei $f: A \longrightarrow B_0$ ein Iso

$g: A \longrightarrow B_1$ ein Iso.

Dann gilt $B_0 = B_1$ und $f = g$.

Aus (TH) folgt (i) durch $B_0 = B_1 = B$.

(ii) $B = A$, $B_0 = A$, $f = id$

B_1 ein echtes AS von A

(iii) ebenso.

$A, B \quad B_0, B_1 \subseteq B$

$f: A \longrightarrow B_0 \quad$ Iso.

$g: A \longrightarrow B_1$

Beweis durch Ordnungsinduktion:

$Z := \{ a \in A ;\ f(a) = g(a) \}$

z.z.: Z ist ordnungsinduktiv.

Sei $x \in A$ beliebig mit $R[x] \subseteq Z$.

D.h. $f \upharpoonright R[x] = g \upharpoonright R[x]$

Wir wissen, da f ein Iso war, daß

$f(x)$ das kleinste Elt. von B_0 ist, welches größer ist als alle Elte von $\mathrm{Bild}(f \upharpoonright R[x])$.

Ebenso für g:

$g(x)$ ist das kleinste Elt. von B_1, welches größer ist als alle Elt. von $\mathrm{Bild}(g \upharpoonright R[x])$

$= \mathrm{Bild}(f \upharpoonright R[x])$.

Falls nun $f(x) \neq g(x)$, so OBdA $f(x) R' g(x)$.

Da B_1 ein AS war, folgt daß $f(x) \in B_1$.

Widerspruch.

$\Longrightarrow f(x) = g(x)$

$\Longrightarrow x \in Z.$

Also ist Z ordnungsinduktiv, also ist $Z = A$.

Also f.a. $a \in A$ $f(a) = g(a)$.

Aber $B_0 = \text{Bild}(f)$

$ \quad \; \| $

$ B_1 = \text{Bild}(g)$

$\Longrightarrow f = g$ & $B_0 = B_1$. q.e.d.

Beweis des Fundamentalsatzes.

Seien (A,R) & (B,S) Wohlordnungen.

Definiere

$$W := \{ f \subseteq A \times B \,;\, f \text{ ist ein Iso von einem } \underline{\text{AA von } A} \text{ auf einem AA von } B \}$$

Bsp. ① $\emptyset \subseteq A \times B$ ist ein Iso von $\emptyset \subseteq A$ nach $\emptyset \subseteq B$.

② Falls a_0 minimal in A und b_0 minimal in B, so ist

$A_0 := \{a_0\}$ ein AS von A

$B_0 := \{b_0\}$ ein AS von B

$f := \{(a_0, b_0)\}$ ist ein Iso von A_0 nach B_0.

Falls $f, g \in W$, so gilt

$$f \subseteq g \text{ oder } g \subseteq f.$$

[Zunächst $\mathrm{Def}(f), \mathrm{Def}(g) \subseteq A$ AS, somit gilt entweder $\mathrm{Def}(f) \subseteq \mathrm{Def}(g)$ oder $\mathrm{Def}(g) \subseteq \mathrm{Def}(f)$.

Wir zeigen:

$$\mathrm{Def}(f) \subseteq \mathrm{Def}(g) \Rightarrow f \subseteq g$$

[Andere Richtung ist identisch.]

Betrachte

$$g \restriction \mathrm{Def}(f) : \mathrm{Def}(f) \longrightarrow X$$

Nach Eigenschaft 6 gilt:
X ist AS von B.

<u>Zusammenfassung</u>:

$$f : \mathrm{Def}(f) \longrightarrow \mathrm{Bild}(f)$$

$$g \restriction \mathrm{Def}(f) : \mathrm{Def}(f) \longrightarrow X$$

Nach dem TH gilt $\mathrm{Bild}(f) = X$
und $f = g \restriction \mathrm{Def}(f)$.

Also $f \subseteq g$.

Wegen $f \subseteq g$ oder $g \subseteq f$ ist

$h := \bigcup W$ eine Funktion

$$h : \mathrm{Def}(h) \longrightarrow \mathrm{Bild}(h)$$

$\mathrm{Def}(h)$: AS von A

$\mathrm{Bild}(h)$: AS von B

Vier Fälle

① $\mathrm{Def}(h) = A$ & $\mathrm{Bild}(h) = B$

$\Longrightarrow$ h ist Iso von A nach B

② $\mathrm{Def}(h) = A$ & $\mathrm{Bild}(h) \subsetneq B$

$\Longrightarrow$ h ist Iso von A in echtes AS von B

③ $\mathrm{Def}(h) \subsetneq A$ & $\mathrm{Bild}(h) = B$

$\Longrightarrow$ h^{-1} ist Iso von B in echtes AS von A

X Kann nicht eintreten.

④ $\mathrm{Def}(h) \subsetneq A$ & $\mathrm{Bild}(h) \subsetneq B$.

Sei nun $\bar{a}$ minimal in $A \setminus \mathrm{Def}(h)$

$\bar{b}$ minimal in $B \setminus \mathrm{Bild}(h)$

$\bar{h} = h \cup \{(\bar{a}, \bar{b})\}$ ist ein Iso von $\mathrm{Def}(h) \cup \{\bar{a}\}$ nach $\mathrm{Bild}(h) \cup \{\bar{b}\}$

Somit $\bar{h} \in W \Longrightarrow \bar{a} \in \mathrm{Def}(h)$

Widerspruch.

q.e.d.