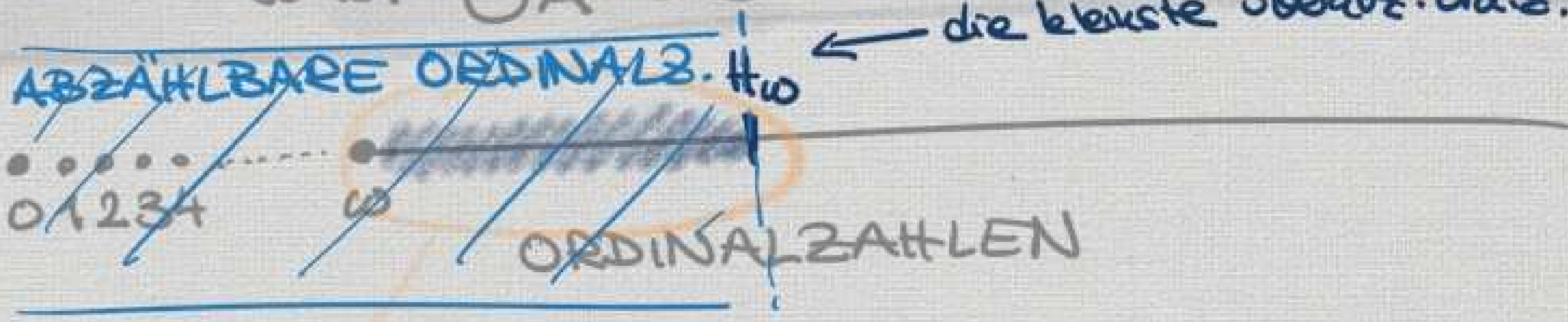
MLML XIX 17. Juni 2021

SATZ VON HARTOGS
Für jede Menge x existiert eine Ord.z. α, so daß keine Inj. $f: \alpha \to x$ ex. H_x

Def. κ heißt initiale Ordinalzahl oder Kardinalzahl falls für alle $\alpha < \kappa$ keine Inj. von κ nach α ex.

Lemma Falls A eine Menge von Kardinalzahlen ist, so ist $\bigcup A$ eine Kardinalzahl.

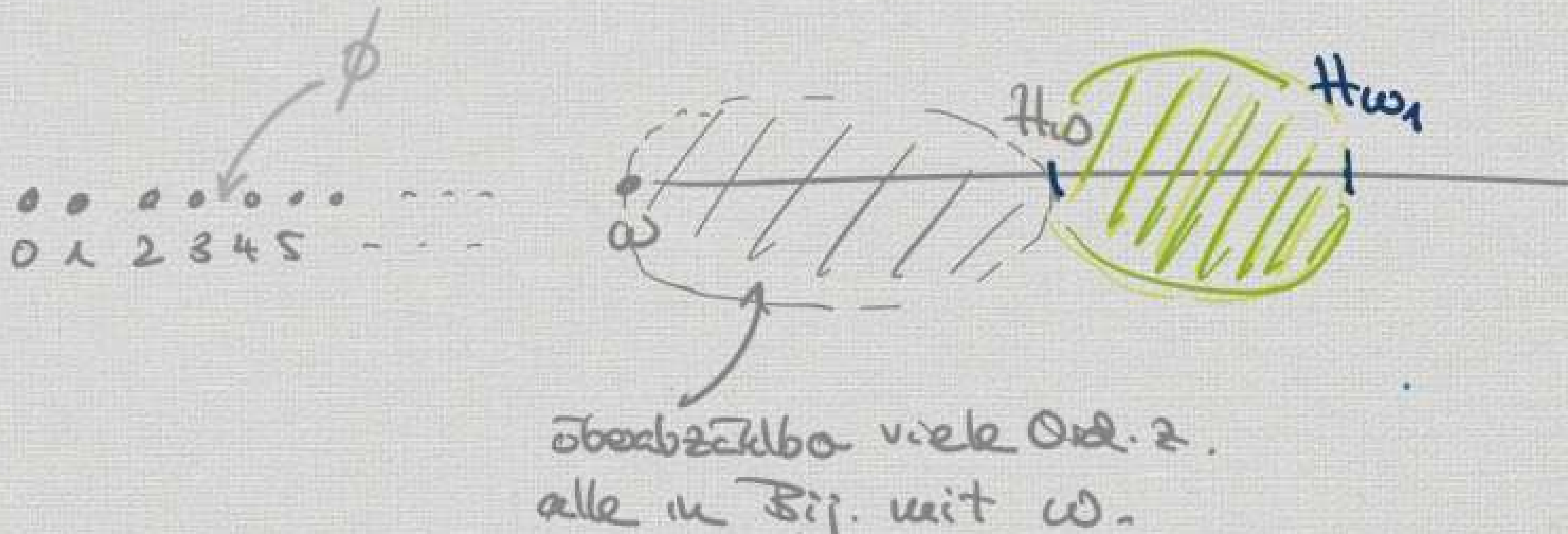


Arithmetische Operationen:
$\alpha + \beta$, $\alpha \cdot \beta$

Falls α, β abzählbar, so sind $\alpha + \beta$ und $\alpha \cdot \beta$ abzählbar.

Es liegt recht viel zw. ω & $H_\omega = \{\alpha;\ \alpha \text{ ist abzählbar}\}$:
nämlich alle abzählbar unendlichen Ord.z.
z.B. $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$, $\omega+\omega$, $\omega+\omega+\omega$, ...
Falls α abz. und β abz. $\Longrightarrow$ es ex. eine Surj. von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ auf $\alpha \times \beta$ und somit $\alpha \cdot \beta$.

Bem. $+, \cdot$ führen aus dem Anfangssegment der abz. Ord. (H_ω) nicht heraus.



Wir können also definieren

$$\omega_1 := H_\omega$$

die erste überabzählbare Ord.zahl
= erste überabz. Kard.z.

Danach

$$\omega_2 := H_{\omega_1}$$

die zweite überabz.bare Kard.z

Falls $\omega_1 \leq \alpha < \omega_2$, so ist α in Bijektion mit ω_1.

Usw.

$$\omega_3 := H_{\omega_2}$$
$$\omega_4 := H_{\omega_3} \quad \text{etc.}$$

<u>Frage</u> gilt auch für $H_{\omega_1} = \omega_2$, daß $\alpha, \beta < \omega_2$
$\Longrightarrow \alpha + \beta,\ \alpha \cdot \beta < \omega_2$?

SEMINAR DESKRIPTIVE MENGENLEHRE

Priv.-Doz. Dr. YURII KHOMSKI

Blockseminar Juli/August 2021

Verbindungen zwischen Mengenlehre und

- Topologie
- Analysis
- Maßtheorie

BEI INTERESSE BITTE PER E-MAIL MELDEN!

WS 21/22

Vertiefungsvorlesung "REKURSIONSTHEORIE"

2 SWS ohne Übungen

Blockseminar "GROSSE KARDINALZAHLEN" (Khomskii)

→ Januar 2022

Wir schließen diesen Abschnitt mit einem Ergebnis, dem in der Kardinalzahlarithmetik eine große Bedeutung zukommt.

1.11 Satz von HESSENBERG**.** Für alle α ist $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha \sim \aleph_\alpha$.

Da jede unendliche Ordinalzahl zu einem Aleph äquivalent ist, gilt dieser Satz auch für unendliche Ordinalzahlen. Eine Ausdehnung auf beliebige unendliche Mengen ist erst mit dem Auswahlaxiom möglich.

(H10.3) Lesen und verstehen Sie den Beweis des Satzes von Hessenberg im Buch von Ebbinghaus (Satz IX.1.11 auf S. 127). Ebbinghaus schreibt auf S. 128: "Es ist nicht schwer zu sehen, daß die Struktur $(\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha, r)$ eine Ordnung i.S.v. $<$ ist." Zeigen Sie diese Behauptung.

Ebbinghaus beweist danach, daß dies sogar eine Wohlordnung ist und wählt einen Isomorphismus f zwischen einer Ordinalzahl ε und dieser Struktur. Berechnen Sie $f(\omega)$, $f(\omega \cdot 2 + 1)$ und $f(\omega \cdot 3 + 2)$.

Es gilt in der Tat: $\aleph_\omega \times \aleph_\omega$ ist in Bijektion zu $\aleph_\omega$ und dies gilt allgemein.

SATZ VON HESSENBERG

IX.1.11 in Ebbinghaus

Hausaufgabe (H10.3) bittet Sie, diesen Beweis zu verstehen.

Die Aleph-Hierarchie

Durch transfinite Rekursion über die Ordinalzahlen:

$$\aleph_0 := \omega$$

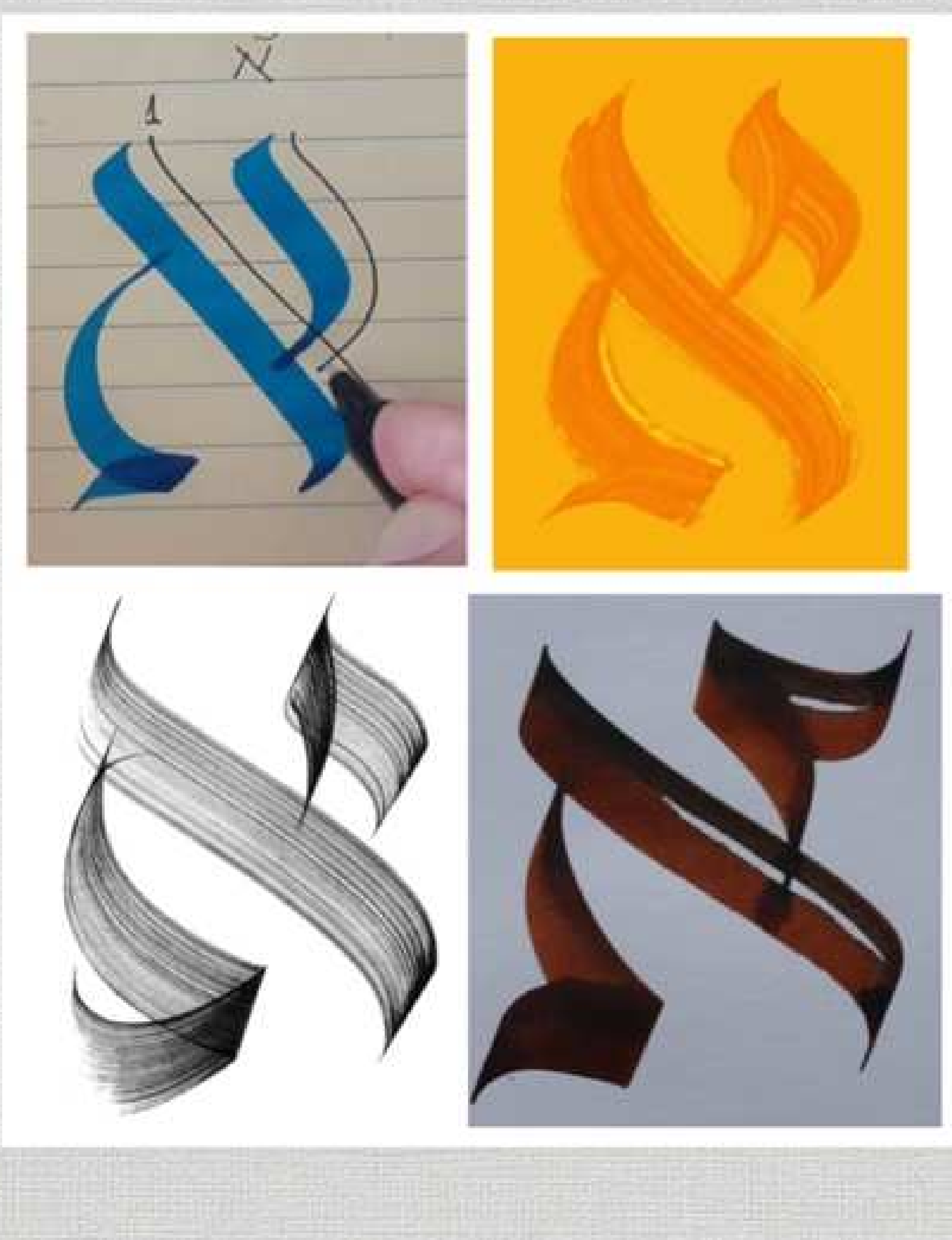
$$\aleph_{\alpha+1} := H_{\aleph_\alpha}$$

$H_{\aleph_\alpha}$ sind immer Kardinalzahlen

Falls λ eine Limeszahl ist,

$$\aleph_\lambda := \bigcup \{\aleph_\xi \,;\, \xi < \lambda\}.$$

Dies ist auch Kardinalzahl nach Lemma aus VL XVIII.



Aleph

Erster Buchstabe des hebräischen Alphabets

א   א

schnellgeschriebene Variante.

Def. Eine Ordinalzahl κ heißt ein Aleph falls eine Ord.z. α existiert mit

$$\kappa = \aleph_\alpha .$$

Eigenschaften

① Jedes Aleph ist eine Kardinalzahl.

② Die Folge ist strikt steigend:

$$\alpha < \beta \Longrightarrow \aleph_\alpha < \aleph_\beta .$$

[① & ② beide durch transfinite Ind. beweisen].

③ Alle Alephs sind unendlich.

④ Für alle ~~transfiniten~~ α gilt $\alpha \leq \aleph_\alpha$.

[Beweis per Induktion:

$\underline{\alpha = 0}$ $\quad 0 \leq \aleph_0 = \omega$. ✓

$\underline{\alpha \mapsto \alpha+1}$ Ang. $\alpha \leq \aleph_\alpha$: dann ist $\aleph_{\alpha+1} = H_{\aleph_\alpha}$ die Menge aller Ord.z., die in $\aleph_\alpha$ injiziert werden können. Da $\alpha \leq \aleph_\alpha$, ist $id : \alpha \to \aleph_\alpha$ eine Inj. von α nach $\aleph_\alpha$.

Da $\aleph_\alpha$ unendlich ist und insbesondere $\mathbb{N} \subseteq \aleph_\alpha$

Somit ist die folgende Fkt. eine Injektion von $\alpha+1$ nach $\aleph_\alpha$:

$$
\begin{array}{ccc}
\alpha+1 & & \aleph'_\alpha \\
\alpha & \longmapsto & 0 \\
n & \longmapsto & n+1 \\
\beta & \longmapsto & \beta
\end{array}
$$

falls $\beta \notin \mathbb{N}$ und $\beta \neq \alpha$

Also ex. auch eine Inj. von $\alpha+1$ nach $\aleph'_{\alpha+1} \supseteq \aleph'_\alpha$.

<u>Limesfall</u> Sei λ Limesordinalzahl und f.a. $\alpha < \lambda$ $\boxed{\alpha \leq \aleph'_\alpha}$

$$\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \alpha \leq \bigcup_{\alpha<\lambda} \aleph'_\alpha \overset{\text{Def.}}{=} \aleph'_\lambda .$$

q.e.d.]

<u>Theorem</u> Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1) κ ist eine Kardinalzahl

(2) $\kappa \in \mathbb{N}$ oder κ ist ein Aleph

[(2) $\Rightarrow$ (1) folgt nach den Eigenschaften auf S.6]

Beweis von (1) $\Rightarrow$ (2):

Sei κ eine Kardinalzahl.
OBdA $\kappa \notin \mathbb{N}$. Nach (4) gilt $\kappa \leq \aleph_\kappa$.
Also ex. ein minimales λ mit

$$\kappa \leq \aleph_\lambda.$$

Fall 1 $\lambda = 0$: $\kappa \leq \aleph_0 = \omega$.

$$\Longrightarrow \kappa = \aleph_0. \checkmark$$

Fall 2 λ ist Nachfolger, also $\lambda = \delta + 1$.

$$\aleph_\delta < \kappa \leq \underset{\overset{\shortparallel}{H_{\aleph_\delta}}}{\aleph_{\delta+1}} = \aleph_\lambda$$

Ang. $\aleph_\delta < \kappa < \aleph_{\delta+1}$.
Dann ist κ in Bij. mit $\aleph_\delta$.
Aber dann ist κ keine Kardinalzahl. Widerspruch!
Also $\kappa = \aleph_{\delta+1}$. $\checkmark$

Fall 3 λ ist Limes. $\kappa \leq \aleph_\lambda = \bigcup_{\xi<\lambda} \aleph_\xi$.

Falls $\kappa = \aleph_\lambda \Longrightarrow$ Fertig! $\checkmark$

Also nehmen wir an, $\kappa < \aleph_\lambda$.

$$\Longleftrightarrow \kappa \in \aleph_\lambda = \bigcup_{\xi<\lambda} \aleph_\xi$$

$$\kappa \in \aleph_\lambda = \bigcup_{\xi<\lambda} \aleph_\xi$$

$$\Longrightarrow \text{es ex. } \boxed{\xi < \lambda} \quad \kappa \in \aleph_\xi$$

$$\Longrightarrow \boxed{\kappa \leq \aleph_\xi}$$

Widerspruch zur Wahl von λ minimal mit dieser Eigenschaft.

q.e.d.

Zusammenfassung

$$\left.\begin{array}{l}\text{„unendliche Kardinalzahl"} \\ \text{„unendliche initiale Ord.z."} \\ \text{„Aleph"}\end{array}\right\} \text{sind gleichbedeutend.}$$

Folgerung Jede unendliche Ord.z. ist in Bijektion mit einem eindeutig bestimmten Aleph.

Mächtigkeit von Mengen

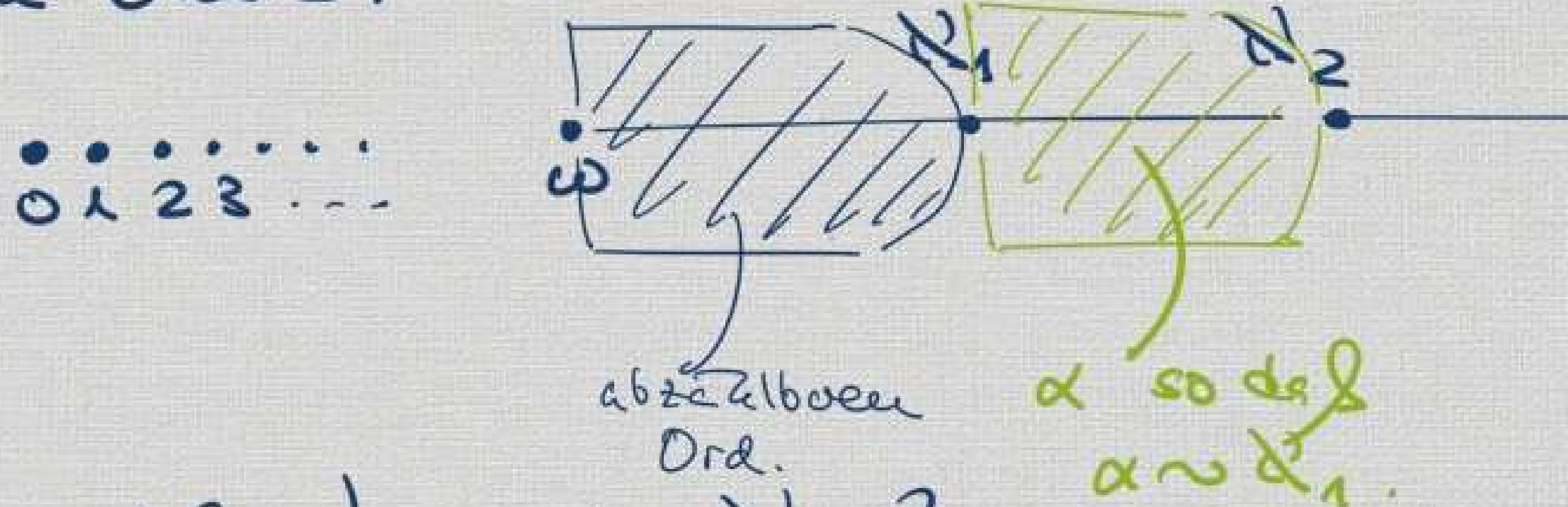
Def. X, Y heißen gleichmächtig falls eine Bijektion zw. X und Y existiert.

$X \sim Y$.

Ebbinghaus

$\sim$ ist eine Äquivalenzrelation, welche das Mengenuniversum partitioniert.

Die von den Alephs erzeugten Cluster auf den Ord. z.



D.h., daß $\{\alpha ; \alpha \sim \aleph_\gamma\}$ ist eine Teilmenge der $\sim$-Äquivalenzklasse von $\aleph_\gamma$.

Def. $X \preceq Y :\Longleftrightarrow$ es ex. Injektion von X nach Y.

$X \prec Y :\Leftrightarrow$ es ex. Inj. von X nach Y und $X \not\sim Y$.

BOLZANO — Paradoxien des Unendlichen c. 1850

X ist echt kleiner als Y,

falls $X \subsetneqq Y$.

Bsp. "Die Menge der geraden Zahlen ist echt kleiner als die Menge der natürlichen Zahlen."

Aber $n \longmapsto 2n$ ist eine Bijektion

zw. $\mathbb{N} \longrightarrow 2\mathbb{N} := \{2n ; n \in \mathbb{N}\}$

Also $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N}$, also

sind $\mathbb{N}$ und $2\mathbb{N}$ gleichmächtig

obwohl $2\mathbb{N}$ echt kleiner als $\mathbb{N}$ ist.

Fazit Der oben gewählte Begriff von echt kleiner ist im Kontext der Analyse von Kardinalzahlen nicht geeignet.

1.4 Satz (Ordnungseigenschaften von $\preceq$).

(i) $x \preceq x$.

(ii) $x \preceq y \wedge y \preceq z \to x \preceq z$.

(iii) $x \preceq y \wedge y \preceq x \to x \sim y$.

(iv) $\forall xy\,(x \preceq y \vee y \preceq x) \leftrightarrow \mathbf{AC}$.

Cantor-Schröder-Bernstein

CSB

Teil (iii) ist bekannt als *Äquivalenzsatz von* Bernstein, Cantor *und* Schröder.[1] Teil (iv) sagt uns, daß wir die vollen Ordnungseigenschaften (mit $\sim$ anstelle von $=$) erst in **ZFC** zur Verfügung haben. Aufgrund der Definition von $\prec$ erhalten wir als Korollar:

IX.1.4 (iii)

$$X \preceq Y \;\&\; Y \preceq X \Longrightarrow X \sim Y.$$

Wir werden diesen Satz später im Zsh. mit dem Auswahlaxiom beweisen. Er kann allerdings auch ohne Auswahlaxiom bewiesen werden: Beweis in Ebbinghaus.

Aus CSB folgt:

$$X \prec Y :\Longleftrightarrow X \preceq Y \;\&\; X \not\sim Y$$

$$\Longleftrightarrow X \preceq Y \;\&\; Y \not\preceq X$$

Die $\sim$-Äquivalenzklassen teilen das Universum in Cluster von gleichmächtigen Mengen auf.

Bem. Die $\sim$-Äquivalenzklassen sind fast immer keine Mengen.

Sicherlich ist die Klasse aller vollelementigen Mengen eine Menge:

$$\{\emptyset\}$$

Falls C eine solche Äq.klasse ist und $x \in C$ und $x \neq \emptyset$, sei $y \in x$.

Dann gilt, falls $z \notin x$, so ist

$$x_{(z)} = (x \setminus \{y\}) \cup \{z\} \sim x$$

$$\left[\text{Bij.} \quad \begin{array}{ll} v \longmapsto v & v \neq z \\ z \longmapsto y & \end{array} \right]$$

Also ist $x_{(z)} \in C$.

Wäre C eine Menge, so auch $\bigcup C$, dann auch $\bigcup C \cup x$. Aber dies ist universell und somit keine Menge.

D.h. wir hätten gerne kanonische Repräsentanten für diese Äquivalenzklassen.

z.B. falls X endlich mit z.B n Elementen so ist $n \sim X$; und n ist die einzige Ord.-z. α, so daß $\alpha \sim X$.

Sollte eine Ordinalzahl α existieren mit $X \sim \alpha$, so ist X entweder endlich oder es ex. ein eindeutig bestimmtes Aleph κ, sodaß $X \sim \kappa$.

<u>Def.</u> In diesem Fall definieren wir

$|X| :=$ die eindeutig bestimmte Kardinalzahl κ mit $X \sim \kappa$.

die Kardinalität / Mächtigkeit von X

[Achtung: Dies funktioniert nur für X, welche eine Ord.-z. in ihrer $\sim$-Äquivalenzklasse haben.]

Hoffnung Vielleicht können wir beweisen, daß das stets der Fall ist.

"Es ex. eine Ord. α mit $X \sim \alpha$."

$\Updownarrow$ RSWO

"Es ex. eine Wohlordnung $\mathfrak{W} = (W, R)$ mit $W \sim X$."

$\Updownarrow$ $\quad \Uparrow$ trivial $\quad \Downarrow$ (s.u.)

"Es ex. $R^* \subseteq X \times X$, so daß (X, R^*) Wohlordnung ist."

Sei $f : W \longrightarrow X$ Bij. Definiere $R^* \subseteq X \times X$ durch $f(v) R^* f(w) :\Longleftrightarrow v R w$. Dann ist f ein Isomorphismus von (W, R) nach (X, R^*).

Def. Eine Menge X heiße <u>wohlordenbar</u> gdw ein $R \subseteq X \times X$ existiert, so daß (X, R) eine Wohlordnung ist.

Wohlordenbar $\neq$ wohlgeordnet.

z.B. ist $\mathbb{Z}$ wohlordenbar.

$$\longleftarrow \cdots -3 \; -2 \; -1 \; 0 \; 1 \; 2 \; 3 \; \cdots \longrightarrow$$

$$z \longmapsto \begin{cases} z & \text{falls } z \geq 0 \\ \omega+n & \text{falls } z = -(n+1) \end{cases}$$

Bijektion zwischen $\mathbb{Z}$ und $\omega+\omega$.

Diese Bij. induziert nach dem Argument auf der letzten Seite eine Wohlordnung auf $\mathbb{Z}$.

? Können wir zeigen, daß jede Menge wohlordenbar ist.

Zermeloscher Wohlordnungssatz.

<u>Theorem</u> (<u>Zermelo 1904</u>).

Jede Menge ist wohlordenbar.

Beweis nicht in Z + Ers, sondern unter Verwendung des Auswahlaxioms.