MATHEMATISCHE LOGIK & MENGENLEHRE

XIV

31. Mai 2021

Mengentheoretisches System: $Z := FST + \mathrm{Inf}.$

$\boxed{(\mathbb{N}, S, 0)}$ ist eine Peano-Struktur

(P1), (P2), (P3)

Eigenschaften (VL XIII)

Lemma Falls $k \in \mathbb{N}$ und $k \subseteq n$, so ist $k \in S(n)$.

✓

Lemma F.a. $n, m \in \mathbb{N}$

✓ $n \subsetneq m \iff n \in m$

Addition & Multiplikation (Rekursive Definition via GRASSMANN-Rekursionsgleichungen)

$$n + 0 := n$$
$$n + S(m) := S(n+m)$$

$$n \cdot 0 := 0$$
$$n \cdot S(m) := n \cdot m + n$$

Lemma 1 Für $n, m \in \mathbb{N}$ gilt $n \subseteq m$ oder $m \subseteq n$.

STELLEN SIE SICH DIES ALS ORDNUNG VOR.

Beweis Per Induktion.

$Z := \{ n \in \mathbb{N} ;$ für alle m ist $m \subseteq n$ oder $n \subseteq m \}$.

Wir zeigen: Z ist induktiv.

$n=0$.

Dann gilt: $0 \subseteq m$ f.a. m.

$\Longrightarrow 0 \in Z$.

$Z = \{n;\ \forall m\ m \subseteq n$ oder $\underline{n \subseteq m}\}$

<u>IS</u>: Ang. $n \in Z$. ~~Zeige~~ $S(n) \in Z$.

Wähle m beliebig. Also gilt nach IV

$m \subseteq n$ oder $n \subseteq m$

$\Downarrow$

$\underline{m} \subseteq n \subseteq \underline{S(n)}$ ✓

$\Downarrow$ Lemma aus VL <u>XIII</u>

$m \in S(n)$

<u>Fall 1</u>: $n = m$

$\Longrightarrow m \in S(n)$ ✓

<u>Fall 2</u> $n \in m$

$\Longrightarrow n \subseteq m$ [Transitivität]

$\Longrightarrow S(n) \subseteq m$.

q.e.d.

<u>Nebenbemerkung</u>

$n \in m \Longrightarrow S(n) \subseteq m$.

Lemma 2 Für $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$\boxed{n \in m}$ oder $\boxed{n = m}$ oder $\boxed{m \in n}$.

Beweis Nach Lemma 1 gilt

$n \subseteq m$ oder $m \subseteq n$

Fall 1: $n \subsetneq m \xrightarrow{\text{VL XIII}} \boxed{n \in m}$

Fall 2: $\boxed{n = m}$ ✓

Fall 1: $m \subsetneq n \xrightarrow{\text{VL XIII}} \boxed{m \in n}$

Fall 2: $\boxed{m = n}$ ✓

q.e.d.

ZUSAMMENFASSEND

$(\mathbb{N}, \subseteq)$ ist eine Ordnung i.S.v. $\leq$

- reflexiv — Def.
- transitiv — Def.
- antisymmetrisch — Def.
- total ← Lemma 1

$(\mathbb{N}, \in)$ ist eine Ordnung i.S.v. $<$

- irreflexiv [VL XIII $n \notin n$]
- transitiv [VL XIII alle nat. Z. sind transitive Mengen]
- Trichotomie ← Lemma 2
  ($n < m$ oder $n = m$ oder $m < n$)

Bem. Falls $x \in \mathbb{N}$, so gilt
$$x \in S(x).$$
Also in der Betrachtung von eben
$$x < S(x).$$

Sei $I \subseteq \mathbb{N}$ eine Menge. Wir sagen I heiße ordnungsinduktiv falls für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt:
$$\{y \in \mathbb{N} ; y < x\} \subseteq I \implies x \in I.$$
Das Prinzip der Ordnungsinduktion besagt: falls $I \subseteq \mathbb{N}$ ordnungsinduktiv ist, so ist $I = \mathbb{N}$.

Vgl. Prinzip der vollst. Induktion: falls $I \subseteq \mathbb{N}$ induktiv, so $I = \mathbb{N}$.

Theorem Das Prinzip der Ordnungsinduktion gilt für $\mathbb{N}$.

Beweis Idee: finde induktive Menge innerhalb einer ordnungsinduktiven Menge.

Sei $I \subseteq \mathbb{N}$ ordnungsinduktiv

d.h. $\forall x$ $\boxed{\{y; y<x\} \subseteq I \Longrightarrow x \in I}$

Bemerke, daß $0 \in I$: *

$$\{y; y<0\} = \{y; y \in 0\} = \{y; y \in \emptyset\} = \emptyset$$

Daher $\{y; y<0\} \subseteq I \underset{OI}{\Longrightarrow} 0 \in I$.

Def. $\hat{I} := \{n \in \mathbb{N}; \forall k (k \leq n \Longrightarrow k \in I)\}$

Offensichtlich: $\hat{I} \subseteq I$.

Beh. $\hat{I}$ ist induktiv.

[Wenn das gezeigt ist, ist das Thm bewiesen: $\mathbb{N} = \hat{I} \subseteq I \Longrightarrow \mathbb{N} = I$.]

$n=0$: $0 \in I$ *
Aber $\{y; y \leq 0\} = \{0\}$. $\Big\} \Longrightarrow 0 \in \hat{I}$.

Ang. $n \in \hat{I}$: $\forall k (k \leq n \Longrightarrow k \in I)$

z.z. $\forall k (k \leq S(n) \Longrightarrow k \in I)$.

$k \leq n \Longrightarrow k \in I$ [IV]
oder
$k = S(n)$

Ang. $S(n) \notin \mathbb{I}$.

Nach IV gilt $\{k; k \leq n\} = \{k; k < S(n)\} \subseteq \mathbb{I}$

Also, weil $\mathbb{I}$ ordnungsinduktiv war:

$S(n) \in \mathbb{I}$. Widerspruch.

Also ist $\hat{\mathbb{I}}$ induktiv.

q.e.d.

Das Prinzip der kleinsten Zahl besagt:

Falls $A \subseteq \mathbb{N}$ mit $A \neq \emptyset$, so existiert ein $m \in A$ minimal, d.h.

$$\{x \in \mathbb{N}; x < m\} \cap A = \emptyset.$$

m heißt kleinstes Element von A, falls

$$m \in A \wedge \{x \in \mathbb{N}; x < m\} \cap A = \emptyset.$$

Theorem Das Prinzip der kleinsten Zahl gilt über $\mathbb{N}$.

Beweis Ang. $A \subseteq \mathbb{N}$ hat kein kleinstes Element. Wir zeigen $A = \emptyset$.

Wir zeigen, daß $\mathbb{N} \setminus A$ ordnungsinduktiv ist.

Das reicht nach dem ersten Thm aus.

KEIN KLEINSTES ELEMENT

$$\forall x\,(x\in A \Longrightarrow \exists y\,(y<x \wedge y\in A))$$

Das bedeutet:

falls $\{y\in\mathbb{N};\, y<x\}\subseteq \mathbb{N}\setminus A$,

so ist $x\in \mathbb{N}\setminus A$

Das ist genau die Beh., daß $\mathbb{N}\setminus A$ ordnungsinduktiv ist.

q.e.d.

Zurück zu den arithmetischen Operationen:

$\underline{\text{XIII}}$:

$$\begin{aligned} 0+n &= n+0 = n \\ 0\cdot n &= n\cdot 0 = 0 \\ 1\cdot n &= n\cdot 1 = n \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} n+0 &= n \\ n+S(m) &= S(n+m) \\ \hline n\cdot 0 &= 0 \\ n\cdot S(m) &= n\cdot m+n \end{aligned}}$$

Weitere Eigenschaften:

ASSOZIATIVITÄT $(n+m)+k = n+(m+k)$

Beweis per Induktion:

$k=0$

$$\begin{aligned} &(n+m)+0 \\ &\quad \| \\ &n+m = n+(m+0) \end{aligned}$$

Ang. $(n+m)+k = n+(m+k)$

$$\underline{n+(m+S(k))} = n+S(m+k)$$
$$= S(n+(m+k))$$
$$\overset{IV}{=} S((n+m)+k)$$
$$= \underline{(n+m)+S(k)}$$

$n+0 = n$
$n+S(m) = S(n+m)$

Genauso: Assoziativität für Multiplikation.

Zeige: $1+n = n+1$ $\qquad 1 = S(0)$

Per Induktion

$n=0$: $\quad 1+0 = 1 = 0+1 \quad [\underline{XIII}]$

Ang. $1+n = n+1$.

$$1+S(n) = S(1+n) \overset{IV}{=} S(n+1)$$
$$= n+S(1)$$
$$= n+(\underline{1+1})$$
$$\overset{Ass.}{=} (n+1)+1$$
$$= S(n)+1.$$

Satz Für n, m: $n+m = m+n$.

Per Ind. $m=0$ wurde in VL $\underline{\text{XIII}}$ gezeigt.

Ang. $n+m = m+n$ für alle n

$$n+S(m) = S(n+m) \underset{IV}{=} S(m+n)$$

$\boxed{n+S(m) = S(n+m)}$

$*$

$$= m + S(n)$$

$$= m + (n+1)$$

vorige Überlegung

$$= m + (1+n)$$

$$\overset{Ass}{=} (m+1) + n$$

$$= S(m) + n.$$

q.e.d.

Verknüpfung von $\leq, <$ mit $+, \cdot$.

z.B. falls $n<m$, so $k+n<k+m$.

Per Ind. Falls $m=0$, so gibt es kein $n<m$, also trivialerweise wahr.

Ang. $n<m \Longrightarrow \boxed{k+n<k+m}$ $k+n \in k+m$

Betrachte $n<S(m)$ $\quad k+S(n) = S(k+n)$

$$\in S(k+m) = k+S(m)$$

Distributivgesetze:

$$n\cdot(m+k) = n\cdot m + nk$$

$$(n+m)k = n\cdot k + m\cdot k\,.$$

sind auf Blatt 8 als (H8.1).

FAZIT Ist $\mathfrak{A} \models Z$ (Zermelo-Mengenlehre), so gibt es in A ein Element, welches sich wie unsere altbekannten natürlichen Zahlen verhält.

Nächstes Ziel: $\mathbb{Z}$.

Uns ist aus der Algebra folgendes bekannt:

Falls $(A,+,0)$ ein sogenanntes abelsches Monoid mit Kürzungsregel ist:

- $+$ ist assoziativ ✓
- $+$ ist kommutativ ✓
- $a+0=0+a=a$ ✓

} nachgewiesen für $\mathbb{N}$

$$a+b=a+c \Longrightarrow b=c.$$

[Falls $b\neq c$, so ist $b<c$ oder $c<b$, also nach obiger Bem. $a+b<a+c$ bzw. $a+c<a+b$.]

$(\mathbb{N},+,0)$ ist abelsches Monoid mit Kürzungsregel dann definiere auf $A \times A$ die Äquivalenzrelation

$$(a,b) \sim (a',b') :\Longleftrightarrow a+b' = b+a'$$

und betrachte $A \times A/_\sim$ mit

$$[a,b]_\sim + [a',b']_\sim := [a+a', b+b']_\sim$$

Dann ist $\left(A \times A/_\sim, +\right)$ eine Gruppe.

Wir können also jetzt $\mathbb{Z}$ als

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N}/_\sim$$

definieren. Dort haben wir auch eine Multiplikation

$$[a,b]_\sim \cdot [a',b']_\sim := [aa', bb']_\sim$$

Dann ist $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ein nullteilerfreier Ring.

Wiederum aus der Algebra: über einem nullteilerfreien Ring konstruieren wir über die Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{[0,0]_\sim\}$

$$(z,z')\sim(\bar{z},\bar{z}') :\Leftrightarrow z\cdot\bar{z}' = z'\cdot\bar{z}$$

Dann ist

$$Q = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{[0,0]_\sim\}\big/\sim$$

der <u>Quotientenkörper</u> von $\mathbb{Z}$ und wir können $\mathbb{Q}$ mit Q identifizieren.

Für den Schritt $\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{R}$ betrachten Sie z.B. Operationen der Vervollständigung wie

① Cauchy-Vervollständigungen

② Dedekind-Vervollständigungen (H7.3)

Man beachte, daß mit $\mathbb{R}$ natürlich auch $\mathrm{Funk}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ in Modellen von $\mathbb{Z}$ existiert, Stetigkeit (über ε-δ) definierbar ist und somit z.B. $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$

in unserem Modell existieren.

__Bem. 1__ Es sieht so aus, als würde Z als Grundlagensystem für die gesamte Mathematik ausreichen?

Ist das so?

[Man beachte, daß Z nicht alle Axiome des Buches enthält:

Fehlen: Regularität

Ersetzung

Auswahlaxiom]

__Bem. 2__ Alle kanonischen Objekte der Mathematik $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ etc sind nicht wirklich kanonisch definiert, sondern nur bis auf Isomorphie.

__z.B.__ Wir hatten $\mathbb{Z} := \mathbb{N}\times\mathbb{N}/_\sim$ gesetzt, aber für jedes $\sim$-Repräsentantensystem $R \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ reicht es $\mathbb{Z} := R$ zu setzen.

Dann ist

$$(\mathbb{R}, +, 0) \cong (\mathbb{N}\times\mathbb{N}/_{\sim}, +, 0),$$

aber mengentheoretisch sind $\mathbb{R}$ und $\mathbb{N}\times\mathbb{N}/_{\sim}$ nicht identisch.

Elemente von $\mathbb{R}$ sind Paare;
Elemente von $\mathbb{N}\times\mathbb{N}/_{\sim}$ sind Mengen von Paaren.

z.B.
"Wieviele Elemente hat -3?"

falls $-3 = \{(n, n+3);\ n \in \mathbb{N}\}$,
so hat -3 unendlich viele Elemente

Aber falls $-3 = (0,3)$

$$= \{\{0\}, \{0,3\}\}$$

so ~~hat~~ hat -3 zwei Elemente.