MLML XIII

27. MAI 2021

FST / Z

$\mathbb{N}$: die kleinste induktive Menge $\quad S(x) := x \cup \{x\}$

Theorem (INDUKTIONSPRINZIP)

$A \subseteq \mathbb{N}$ mit $0 \in A$ und $\forall x\,(x \in A \to S(x) \in A)$

„A ist induktiv“

Dann: $A = \mathbb{N}$.

Theorem (REKURSIONSPRINZIP)

aus Gruppenarbeit G7

Sei Z eine beliebige Menge, $f : Z \to Z$ eine Funktion und $z_0 \in Z$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion $F : \mathbb{N} \to Z$ mit

REKURSIONSGLEICHUNG

$$F(\varnothing) = z_0 \text{ und}$$
$$F(S(n)) = f(F(n)) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Bem. Um eine Aussage in Z über alle Elemente von $\mathbb{N}$ zu beweisen, reicht es aus, zwei Dinge zu beweisen:

1. sie gilt für 0
2. falls sie für x gilt, so gilt sie für S(x).

1.3 Definition. Eine PEANO-*Struktur* ist eine Struktur (a, σ, ν) mit Trägermenge a, $\sigma : a \to a$ und $\nu \in a$, die den folgenden Bedingungen genügt:

(P1) $\sigma : a \xrightarrow{inj} a$; m.a.W. $\sigma(x) = \sigma(y) \Rightarrow x = y$

(P2) $\nu \notin \text{Bild}(\sigma)$;

(P3) $\forall b \left(b \subseteq a \wedge \nu \in b \wedge \forall x(x \in b \to \sigma(x) \in b) \to b = a\right)$. ← INDUKTIONSPRINZIP.

PEANO-Axiome

SATZ Ebbinghaus V. 1.4

$(\mathbb{N}, S, 0)$ ist eine Peano-Struktur.

SATZ von DEDEKIND Ebbinghaus V. 1.7

Je zwei Peano-Strukturen sind zueinander isomorph.

Diese beiden Sätze erlauben uns, die Menge $\mathbb{N}$ als "die natürlichen Zahlen" zu bezeichnen.

Beweis des Satzes von DEDEKIND. Wir zeigen (unter Voraussetzung, daß 1.4 bereits gezeigt ist), daß jede PEANO-Struktur zu $(\mathbb{N}, S, 0)$ isomorph ist.

Sei (a, σ, ν) eine beliebige Peano-Struktur.

Ziel ist eine Funktion $f : \mathbb{N} \longrightarrow a$, welche die Struktur erhält, also

$$f(0) = \nu$$
$$f(S(n)) = \sigma(f(n)).$$

Isomorphie-bedingung sehen aus wie Rekursionsglied.

<u>Idee</u> Verwende den Rekursionssatz mit $Z := a$ und Rekursionsgleichungen:

$$\boxed{f(0) := \gamma}$$
$$\boxed{f(S(n)) := \sigma(f(n))}$$

und erhalte nach dem Rekursionssatz eine eindeutig definierte Fkt. $f: \mathbb{N} \to a$.

Noch zu zeigen: die Funktion f ist ein Isomorphismus.

- Strukturerhaltung folgt aus der Definition
- Injektivität folgt aus P1.

Verbleibt die Surjektivität:

Also $\underline{\mathrm{Bild}(f)} = a$.

Aber es gilt $\gamma = f(0) \in \mathrm{Bild}(f)$.

Ang. $x \in \mathrm{Bild}(f)$, also ex. $n \in \mathbb{N}$ mit $x = f(n)$, dann ist

$$\sigma(x) = \sigma(f(n)) = f(S(n)) \in \mathrm{Bild}(f)$$

$\overset{P3}{\Longrightarrow}$ $\mathrm{Bild}(f) = a$ q.e.d.

Weiterführende Bemerkung

1. Axiom P3 ist NICHT in der erststufigen Sprache L^S mit $S = \{0, \sigma\}$ formulierbar.
2. Die Axiome der Peano-Arithmetik PA sind daher ein schwächeres Axiomensystem als die o.g. Bedingungen für Peano-Strukturen.
3. D.h. sog. Nichtstandardmodelle von PA, welche nicht isomorph zu $(\mathbb{N}, S, 0)$ sind, widersprechen nicht dem Satz von Dedekind.

Nun zum Beweis von Satz V.1.4.

$(\mathbb{N}, S, 0)$ ist eine Peano-Struktur

$i \in \mathbb{N}$

1.6 Hilfssatz. (i) $x \in i \to x \in \cancel{\omega}^{\mathbb{N}} \wedge \underline{x \subseteq i}$.

(ii) $\underline{(x \in i \to x \subseteq i)} \wedge (x \in \underset{\mathbb{N}}{\cancel{\omega}} \to x \subseteq \underset{\mathbb{N}}{\cancel{\omega}})$.

(iii) $i \notin i$.

(iv) $\boxed{\mathrm{Bild}(\mathbf{S}) \cup \{\mathbf{0}\}} = \cancel{\omega}^{\mathbb{N}}$.

[Ebbinghaus verwendet den Buchstaben ω für $\mathbb{N}$.]

<u>Definition</u> Eine Menge x heißt <u>transitiv</u> falls für alle y, z gilt

$y \in z$ und $z \in x \Longrightarrow y \in x$.

Man beachte: dies ist eine Eigenschaft von x, nicht eine Eigenschaft einer Relation.

[leicht (Hausaufgabe): finden Sie Bsp. für x nicht transitiv, aber $\in$ auf x ist eine transitive Relation; x transitiv, aber $\in$ auf x ist keine transitive Relation]

<u>Äquivalent</u>: x ist transitiv

$\Longleftrightarrow$

für alle y, $y \in x \Longrightarrow y \subseteq x$.

Bsp. (1) $\emptyset$ ist transitiv.

[Hat keine Elemente, somit sind alle Elemente TM.]

(2) Falls x transitiv ist, so ist auch $S(x) = x \cup \{x\}$ transitiv.

[Ang. $y \in z \in S(x) = x \cup \{x\}$

Fall 1 $z \in x$. $y \in z \in x \underset{x \text{ trs}}{\Longrightarrow} y \in x \subseteq S(x)$

Fall 2 $z \in \{x\} \Longrightarrow z = x$.

$y \in z = x \Longrightarrow y \in x \subseteq S(x)$]

Aus (2) folgt unmittelbar:

(*) Jede natürliche Zahl ist eine transitive Menge.

[Induktion: $Z \subseteq \mathbb{N}$ definiert durch

$Z := \{ n \in \mathbb{N} ; \ n \text{ ist transitive Menge} \}$

(1) sagt: $\emptyset \in Z$.

(2) sagt: falls $n \in Z$, so $S(n) \in Z$

Zusammen mit Induktion: $Z = \mathbb{N}$.]

Ebenso: Falls $x \in n$, so ist $x \in \mathbb{N}$.

[$Z := \{ \underline{n \in \mathbb{N}}$; für alle $x \in n$ gilt $x \in \mathbb{N} \}$.

$\emptyset \in Z$ ✓

(**) Falls $x \in Z$, so gilt $x \subseteq \mathbb{N}$

und $S(x) = x \cup \{x\} \subseteq \mathbb{N}$.

$\in \mathbb{N}$

Zusammen per Induktion: $Z = \mathbb{N}$.]

(*) & (**) geben Beh. 1.6 (i). & 1.6. (ii).

Nun zu (iii): $i \notin i$.

[$Z := \{ n \in \mathbb{N};\ n \notin n \}$

$\emptyset \in Z$ ✓

Ang. $\underline{n \in Z}$. Ang. für Widerspruch $S(n) \notin Z$

$\iff S(n) \in S(n)$.

$S(n) \in n \cup \{n\}$

Fall 1 $S(n) = n$. $S(n) = n \cup \{n\} \implies n \in n$.

Im Widerspruch zur IA.

Fall 2. $S(n) \in n$. $n \in S(n) \in n \underset{\text{Trs}}{\implies} n \in n$. ↯]

zu (iv). $\underset{\text{''}}{Z}$

Betrachte $\{0\} \cup \mathrm{Bild}(S) \subseteq \mathbb{N}$.

Zeige, daß dies induktiv ist:

$0 \in Z$ ✓

falls $x \in Z$, so ist $S(x) \in \mathrm{Bild}(S)$
$\subseteq Z$.

Also ist $Z = \mathbb{N}$.

q.e.d.
(Hilfssatz 1.6)

<u>Lemma</u> Falls $x \neq 0$, so ist $0 \in x$.

[$Z := \{ n \in \mathbb{N} ;\ \underline{x = 0} \text{ oder } 0 \in x \}$

Zeige: Z ist induktiv.

$\underline{0 \in Z}$. ✓

Falls $x \in Z$, so ist $S(x) = x \cup \{x\}$.

<u>Fall 1</u> $x = 0 \longrightarrow 0 \in S(x)$ ✓

<u>Fall 2</u> $0 \in x \longrightarrow 0 \in x \subseteq S(x)$ ✓]

Lemma Falls $k \in \mathbb{N}$ und $k \subseteq n$, so ist $k \in S(n)$.

$\Big[$ $Z := \{ n \in \mathbb{N} ;$ für alle $\underline{k \in \mathbb{N}}$ mit $\underline{k \subseteq n}$ gilt $\underline{k \in S(n)} \}$

$n = 0 \Longrightarrow k \subseteq 0$ impliziert $k = 0$, somit folgt die Beh. aus dem vorigen Lemma.

Ang. $n \in Z$. ~~Zeige~~ $S(n) \in Z$.

Also $\underline{k \in \mathbb{N}}$ und $\boxed{k \subseteq S(n)}$.

Zu zeigen $k \in S(S(n))$.

$\Longrightarrow \underline{k} \subseteq S(n) = \underline{n} \cup \underline{\{n\}}$

Fall 1 $k \subseteq n \underset{IV}{\Longrightarrow} k \in S(n) \subseteq S(S(n))$.

Fall 2 $n \in k \underset{Trs.}{\Longrightarrow} n \subseteq k \Longrightarrow k = S(n)$

$k \in S(S(n)) = S(n) \cup \{S(n)\}$ $\Big]$

Lemma Für alle $n, m \in \mathbb{N}$

$n \subsetneqq m \Longleftrightarrow n \in m$.

<u>Lemma</u> F.a. $n, m \in \mathbb{N}$

$$n \subsetneqq m \iff n \in m$$

[$Z := \{ m \in \mathbb{N} ;$ f.a. $n \in \mathbb{N}$

$n \subsetneqq m \iff n \in m \}$

$0 \in Z$ ✓

Ang. $m \in Z$. Zeige $S(m) \in Z$.

$\Leftarrow$ Sei nun $n \in S(m)$. Wegen Trs. erhalten wir $n \subseteq S(m)$. Ang. $n = S(m)$, dann wäre $n \in S(m) = n$. Widerspruch zu 1.6 (iii). Also $n \subsetneqq S(m)$.

$\Rightarrow$ Sei nun $n \subsetneqq S(m)$. Das vorige Lemma zeigt

$$n \subseteq S(m) \Rightarrow n \in S(S(m))$$

Also $n \in S(S(m)) = S(m) \cup \{S(m)\}$

Aber $n \neq S(m)$, also gilt

$n \in S(m)$.]

Zum Beweis von 1.4.

(P3) ist das Induktionsprinzip: bereits bewiesen in VL $\overline{\underline{XII}}$.

(P2): $0 \notin \mathrm{Bild}(S)$.

Falls $x \in \mathrm{Bild}(S)$, so ex. y mit $x = y \cup \{y\}$, also $y \in x$, also $x \neq \emptyset$.

(P1) Seien $x, y \in \mathbb{N}$ mit $S(x) = S(y)$.

D.h. $x \cup \{x\} = y \cup \{y\}$.

Fall 1 $x \in \{y\}$. $\Longrightarrow x = y$.

[genau das, was wir zeigen wollten.]

Fall 2 $\boxed{x \in y} \Longrightarrow x \subsetneq y$.

Also ex. $z \in y \setminus x$.

$x \cup \{x\} = y \cup \{y\} \Longrightarrow z = x$.

Es gilt $\boxed{y \in x}$ oder $\boxed{y = x}$.

$\Downarrow$

Widerspruch zu 1.6 (iii)

$x \in y \in x \overset{\text{Trs.}}{\Longrightarrow} x \in x$

Widerspruch zu 1.6 (iii)

q.e.d. Satz 1.4

$(\mathbb{N}, S, 0)$ ist Peano-Struktur
mit einer Ordnung $\leq$ definiert
durch

$$n \leq m :\Longleftrightarrow n \subseteq m$$

und ihrer strikten Ordnung $<$ definiert
durch

$$n < m :\Longleftrightarrow n \in m$$

$$[n \subsetneq m]$$

Äquivalenz dieser beiden Aussagen verwendet unter voriges Lemma.

<u>Eigenschaften dieser Ordnung</u>

- $0 \leq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

- $n < S(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Also gilt per def., daß eine natürliche Zahl genau aus den Zahlen besteht, die strikt kleiner als sie sind.

Arithmetik auf $\mathbb{N}$

Mittels des Rekursionssatzes definieren wir für festes $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion

GRASSMANN Rekursionsgleichungen

$$\mathrm{plus}_n(0) := n$$

$$\mathrm{plus}_n(S(m)) := S(\mathrm{plus}_n(m)).$$

Der Rekursionssatz sagt, daß es eine solche Funktion gibt und wir definieren eine zweistellige Operation $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ durch

$$n + m := \mathrm{plus}_n(m).$$

Wichtige Bemerkung:

Diese Definition ist asymmetrisch: links und rechts spielen sehr unterschiedliche Rollen.

Es ist also a priori überhaupt nicht klar, daß diese Definition eine kommutative Operation definiert.

Bsp.

Satz Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$0 + n = n + 0 = n.$$

2. $\underline{0 + n = n}$ $\quad$ $\underline{n + 0 = n}$ 1.

Beweis

1. $$Z := \{ n \in \mathbb{N} ;\ n + 0 = n \}$$
$$= \{ n \in \mathbb{N} ;\ \mathrm{plus}_n(0) = n \}$$
$$= \mathbb{N} \quad (\text{per def.})$$

2. $$Z := \{ n \in \mathbb{N} ;\ 0 + n = n \}$$
$$= \{ n \in \mathbb{N} ;\ \mathrm{plus}_0(n) = n \}$$

Beh. Z ist induktiv.

$0 \in Z$. $\quad \mathrm{plus}_0(0) = 0$ ✓

Ang. $n \in Z$: $\quad \mathrm{plus}_0(n) = n$.

$$\mathrm{plus}_0(S(n)) = S(\mathrm{plus}_0(n))$$
$$= S(n)$$

q.e.d.

Multiplikation

Für festes n definieren wir

GRASSMANN Rekursionsgleichung

$$\text{mal}_n(0) := 0$$

$$\text{mal}_n(S(m)) := \text{mal}_n(m) + n$$

Daraus definieren wir eine 2-stellige Fkt $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ durch

$$n \cdot m = \text{mal}_n(m).$$

Eigenschaften

(1) $0 \cdot n = n \cdot 0 = 0$

[Auch hier $n \cdot 0 = 0$ ist die Definition.
Für $0 \cdot n = 0$ betrachte

$$Z = \{ n \in \mathbb{N} ; \ 0 \cdot n = 0 \}$$

$0 \in Z$, da $\text{mal}_0(0) = 0$

Falls $n \in Z$, also $0 \cdot n = 0$, so ist

$$0 \cdot S(n) = 0 \cdot n + 0 = 0 + 0 = 0$$

[wie vorher gezeigt].

(2) $1 \cdot n = n \cdot 1 = n$

[$n \cdot 1 = n \cdot S(0)$

$= n \cdot 0 + n$

$\overset{(1)}{=} 0 + n$

$= n$ [nach Bew. von +].

$1 \cdot n = n$

$Z := \{n \in \mathbb{N};\ 1 \cdot n = n\}$

$0 \in Z$ gilt nach (1).

Ang. $n \in Z$, also $1 \cdot n = n$.

$\underline{1 \cdot S(n)} = \underline{1 \cdot n} + 1$

$= n + 1$

$= n + S(0)$

$= S(n + 0)$

$= \underline{S(n)}$]