MLML XII

20. Mai 2021

FST: Re-konstruktion der abstrakten Mathematik:
PAARE, PRODUKTE, RELATIONEN, FUNKTIONEN, QUOTIENTEN

+ Injektion
+ Surjektion
+ Bijektion

Aber: es ex. ein lokalendliches Modell $\mathfrak{M} \models$ FST

Also kann FST nicht die Existenz unendlicher Mengen replizieren.

Frage: Welches Axiom müssten wir hinzufügen, um unendliche Mengen zu bekommen?

Idee: "Es gibt eine unendliche Menge."

$\rightsquigarrow$ LST

Wann immer wir bisher gezeigt haben, daß etwas x unendlich ist (informell), haben wir gezeigt:

"es ex. Injektion $f: \mathbb{N} \to x$"

ALTERNATIVE IDEE:

x ist unendlich $\iff$

es ex. eine Fkt. $f: x \longrightarrow x$, welche injektiv aber nicht surjektiv ist

$\iff$

es ex. ein $y \subsetneqq x$, so daß y in Bijektion mit x ist.

[BOLZANO: Paradoxien des Unendlichen]

Also: Diese Idee enthält nur Begriffe, die in FST ordentlich formalisiert sind.

Def. Eine Menge x heiße Dedekind-unendlich falls

$$DI(x) :\iff \exists y \, (y \subseteq x \wedge y \neq x \wedge \exists f \, (f: x \to y \wedge f \text{ ist Bijektion}))$$

dies ist bis auf Abkürzungen eine LST-Formel

(DInf) $\boxed{\exists x \, DI(x)}$

Axiom der Dedekind-Unendlichkeit

Man könnte nun eine Mengenlehre

$$\mathrm{FST} + \mathrm{DInf}$$

definieren, um die Existenz unendlicher Mengen zu erzwingen.

Da das Ziel des Unendlichkeitsaxioms allerdings die Def. von $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ist und DInf keinerlei Anhaltspunkt gibt, wie man nun $\mathbb{N}$ definieren würde, hat sich eingebürgert, <u>nicht</u> DInf zu verwenden.

<u>Stattdessen</u>: Zurück zum Beweis, daß Modelle von Ext+LM + Paar nicht endlich sein können:

$$\emptyset \neq \{\emptyset\} \neq \{\{\emptyset\}\}$$

Hatten per Induktion bewiesen, daß f.a. $n \neq m$, $f(n) \neq f(m)$.

$f(0)$ $f(1)$ $f(2)$ ...

REKURSION: $f(0) := \emptyset$

$$f(n+1) := \{f(n)\}.$$

Idee:

Verlange die Existenz einer Menge x, welche $\emptyset$ enthält und falls $f(n) \in x$, so auch $f(n+1) \in x$.

(*) $$\boxed{\exists x \left(\emptyset \in x \wedge \forall y \left(y \in x \to \{y\} \in x \right) \right)}$$

Dies ist intuitiv eine unendliche Menge.

(*) ist ein "Unendlichkeitsaxiom".

Bem. 1 Eine solche Menge ist nicht notwendigerweise ein guter Kandidat für "die natürlichen Zahlen".

[Es könnte zu groß sein.]

Bem. 2 Die Rolle von $y \longmapsto \{y\}$ kann ohne weiteres von anderen Operationen übernommen werden.

z.B. $S(y) := y \cup \{y\}$

NACHFOLGEROPERATION.

Unendlichkeitsaxiom (Inf):

Es gibt eine Menge, die $\emptyset$ enthält und mit jedem z auch $z \cup \{z\}$.

Also:

$$\exists x \, (\emptyset \in x \wedge \forall z \, (z \in x \to \overbrace{z \cup \{z\}}^{S(z)} \in x)).$$

Eine Menge, wie sie in **Inf** gefordert wird, nennt man induktiv:

4.1 Definition. x ist *induktiv* $:\leftrightarrow$ $\underbrace{\emptyset \in x \wedge \forall z \, (z \in x \to z \cup \{z\} \in x).}_{\mathrm{Ind}(x)}$

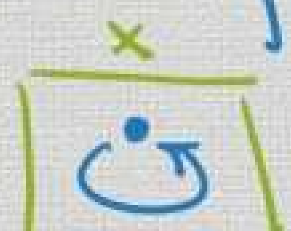
Wir nennen

$$Z := \mathrm{FST} + \mathrm{Inf}$$

das Axiomensystem der Zermelo-Mengenlehre

Zermelo (1908)

WICHTIG Die Verwendung der Symbole $\emptyset$, $\cup$, $\{z\}$ in Inf bedeutet, daß Inf nur im Kontext von FST formuliert werden kann.



QUINE-ATOM

So etwas hat die Eigenschaft $\forall z (z \in x \to z \cup \{z\} \in x)$.

Wie erhalten wir die natürlichen Zahlen?

$$\mathrm{Ind}(x) \longleftarrow \text{LST-Formel}$$

$$\Phi(x) := \underline{\forall I}\,(\underline{\mathrm{Ind}}(I) \longrightarrow \underline{x \in I})$$

Falls nun $\mathfrak{J}$ induktiv ist, so definiere

$$\hat{\mathfrak{J}} := \{x \in \mathfrak{J} \,;\, \Phi(x)\}$$

[verwendet das Aussonderungsaxiom]

__Satz__ Falls $\mathfrak{J}, \mathfrak{J}'$ induktiv, so gilt

$$\hat{\mathfrak{J}} = \hat{\mathfrak{J}}'.$$

__Beweis__ wg. Symmetrie reicht es zu zeigen

$$\hat{\mathfrak{J}} \subseteq \hat{\mathfrak{J}}'.$$

(*) Sei $x \in \hat{\mathfrak{J}} = \{z \in \mathfrak{J} \,;\, \Phi(z)\}$

$\Longrightarrow$ f.a. $\underline{I}$ $\mathrm{Ind}(I) \Longrightarrow x \in \underline{I}$

Aber $\mathfrak{J}'$ war induktiv, also $x \in \mathfrak{J}'$.

Somit $x \in \hat{\mathfrak{J}}' = \{z \in \mathfrak{J}' \,;\, \Phi(z)\}$.

q.e.d.

D.h. die Mengenlehre Z beweist Existenz und Eindeutigkeit der "kleinsten induktiven Menge".

Satz Falls I $\mathcal{J}$ induktiv, so gilt
$$\hat{\mathcal{J}} \subseteq I.$$

Beweis Teil (*) des Beweises des letzten Satzes mit $I = \mathcal{J}'$. q.e.d.

Wie immer bei funktionalen Spracherweiterungen dürfen wir also unter Annahme von Z (Zermelo-ML) ein Symbol für die kleinste induktive Menge einführen:

$$\mathbb{N}.$$

Und wir benennen auch die Objekte in $\mathbb{N}$:

Schreiben 0 für $\emptyset \in \mathbb{N}$.

Schreiben 1 für $\underline{S}(\emptyset) = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \in \mathbb{N}$

Schreiben 2 für $\underline{S}(1) = 1 \cup \{1\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \mathbb{N}$

0 $\emptyset$

1 $\{\emptyset\} = \{0\}$

2 $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$

3. $\{\underbrace{\emptyset}_{0}, \underbrace{\{\emptyset\}}_{1}, \underbrace{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}}_{2}\} = \{0, 1, 2\}$

EXKURS

Was passiert, wenn ich statt der Operation
$S(z) = z \cup \{z\}$ die Operation
$z \longmapsto \{z\}$ nehme?

HG: Nennen wir dies (statt "induktiv")
<u>Zermelo-induktiv</u> nennen, so
erhalten wir ebenso eine kleinste
Zermelo-induktive Menge.

$$\mathbb{N}_{\text{Zermelo}}$$

$\emptyset$ —— 0_Z

$\{\emptyset\}$ —— 1_Z

$\{\{\emptyset\}\}$ —— 2_Z

$\{\{\{\emptyset\}\}\}$ —— 3_Z

$\{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}$ —— 4_Z

$n+1_Z = \{n_Z\}$

$n+1 = \{0,1,2,\dots,n\}$

Eigenschaften von $\mathbb{N}$

Theorem (Z) Falls $\boxed{A \subseteq \mathbb{N}}$ und

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{(i)} \ \emptyset \in A \ \text{ und} \\ \text{(ii)} \ \forall z \ z \in A \rightarrow S(z) \in A \end{array}} \quad (*)$$

dann gilt $A = \mathbb{N}$.

Dies ist das Prinzip der vollständigen Induktion!

Beweis. Man beachte, daß (i) & (ii) genau die zwei Teile der Formel $\mathrm{Ind}(x)$ sind, also besagt $(*)$ einfach nur

$$\mathrm{Ind}(A).$$

Also gilt nach dem zweiten Satz

$$\boxed{\mathbb{N} \subseteq A}.$$

$$\Longrightarrow A = \mathbb{N}.$$

q.e.d.

Wie erhalten wir aus Vollst. Induktion auf $\mathbb{N}$ die gesamte arithmetische Struktur.

Ziel: Per Rekursion über die GRASSMANNschen Rekursionsgleichungen:

$$\boxed{\begin{array}{l} n+0 = n \\ n+(m+1) = (n+m)+1 \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} n \cdot 0 = 0 \\ n \cdot (m+1) = n \cdot m + n. \end{array}}$$

Dafür müssen wir in Z (Zermelo-ML) ein Rekursionsprinzip beweisen.

<u>Theorem</u> (Z) Sei $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ eine Funktion und $n_0 \in \mathbb{N}$ fest. Dann gibt es eine eindeutige Fkt. $F: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit

REKURSIONS-GLEICHUNGEN

$$\boxed{\begin{aligned} F(\emptyset) &= n_0 \\ F(S(n)) &= f(F(n)) \end{aligned}}$$

<u>Beweis</u> Eine Menge $I \subseteq \mathbb{N}$ heißt Anfangssegment, falls für $y \subseteq x \in I$ gilt $y \in I$.
Eine Menge $I \subseteq \mathbb{N}$ heißt echtes AS falls I AS ist und $I \neq \mathbb{N}$.

<u>Def.</u> Eine Funktion $g: I \longrightarrow \mathbb{N}$ heißt <u>KEIM</u> falls gilt

Alle Symbole sind in Z erlaubt, so daß eine LST-Formel ex., die beschreibt, daß g ein Keim ist.

falls $\emptyset \in I$, $g(\emptyset) = n_0$.
(falls $x, S(x) \in I$, so gilt $g(S(x)) = f(g(x))$.

Ein Keim verhält sich genauso wie das gewünschte F, ist aber ggf. nicht auf ganz $\mathbb{N}$ definiert.

__Beh.__ Falls g, g' Keime sind mit

$\mathrm{Def}(g) = I$ und $x \in I \cap I'$,
$\mathrm{Def}(g') = I'$

so gilt $g(x) = g'(x)$.

[Beweis per Induktion:

$A \subseteq \mathbb{N}$

$$A := \{ n \in \mathbb{N} ; \text{ falls } n \in I \cap I', \text{ so } g(n) = g'(n) \}$$

Beh. A ist induktiv

__$\emptyset \in A$:__ Fall 1 falls $\emptyset \notin I \cap I'$, so ist $\emptyset \in A$.

Fall 2 falls $\emptyset \in I \cap I'$, dann

$$g(\emptyset) = n_0 = g'(\emptyset)$$
$$\Longrightarrow \emptyset \in A.$$

__$x \in A \rightarrow S(x) \in A$:__

oBdA $x, S(x) \in I \cap I'$ Dann gilt

$$g(S(x)) = f(g(x)) = f(g'(x)) = g'(S(x)).$$
$$[g(x) = g'(x)]$$

Da $\mathbb{N}$ die kleinste ind. Menge ist, ist

$A = \mathbb{N}$.]

__Beh.__ Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein Keim, so daß $n \in \mathrm{Def}(\mathfrak{g})$.

$\mathfrak{g}$

[Beweis per Induktion:

$$A := \{ n \in \mathbb{N} ;\ \text{es ex. Keim } \mathfrak{g} \text{ mit } n \in \mathrm{Def}(\mathfrak{g}) \}$$

Beh. A ist induktiv.

__$\emptyset \in A$__. Man gebe an

$$\mathfrak{g} := \{ (\emptyset, n_0) \}$$

Dies ist eine Funktion $\mathfrak{g} : \{\emptyset\} \to \mathbb{N}$, $\{\emptyset\}$ ist ein AS der natürlichen Zahlen und $\mathfrak{g}(\emptyset) = n_0$, also ist $\mathfrak{g}$ ein Keim.

__$n \in A \to S(n) \in A$__ Ang. $\mathfrak{g}$ sei ein Keim mit $n \in \mathrm{Def}(\mathfrak{g})$. Dann ist

$$\mathfrak{g}' := \mathfrak{g} \cup \{ (S(n), f(\mathfrak{g}(n))) \}$$

ein Keim. Definiert auf $\mathrm{Def}(\mathfrak{g}) \cup \{S(n)\}$

[man muß sich überlegen, daß dies AS ist]

Erfüllt offensichtlich die Rekursionsgleichung.

Definiere nun F als

$$F = \{ (n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \; ; \; \underbrace{\boxed{\text{es ex. eine Kette } g \text{ mit } n \in \mathrm{Def}(g) \text{ und } g(n) = m}}_{\Phi(n,m)} \}$$

Aussonderung aus $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit der Formel $\Phi(n,m)$

F ist Funktion mit $\mathrm{Def}(F) = \mathbb{N}$:

(1) $\mathrm{Def}(F) = \mathbb{N}$ ist einfach die zweite Beh.

(2) Funktionalität ist die erste Beh.

q.e.d.