MLML $\overline{XI}$

17. Mai 2021

Rekonstruktion der (abstrakten) Mathematik in FST

(Ext)!

FST: (Aus), ($\cup$-Ax), ($\bigcup$-Ax), (Pot)

① Für je zwei Mengen x und y ex. (x,y)

② —— " —— $x \times y$

③ —— " —— die Menge aller binären Relationen zw. x und y.

$Pot(x \times y)$ =

④ —— " —— die Menge aller Funktionen von x nach y: $Funk(x,y)$.

- $Def(x)$
- $Bild(x)$

Bem. "(x,y) existiert".

BEDEUTET

Die Formel $\forall x \forall y \exists z \forall w$

$$(w \in z \Leftrightarrow \ldots\ldots)$$

folgt aus FST.

eindeutige Beschreibung von $(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\}$

Für alle $\mathfrak{A}$, falls $\mathfrak{A} \models FST$, so $\mathfrak{A} \models \forall x \forall y \exists z \forall w \ldots$

Weitere Notationen

$$f : X \longrightarrow Y$$

Abkürzung für $f \in \mathrm{Funk}(X,Y)$

Falls $z \in X$, so können wir schreiben $f(z)$ für das eindeutig bestimmte $w \in Y$ mit $(z,w) \in f$.

Bsp. Der Gruppenbegriff

In der Logik hatten wir gesagt, eine Gruppe ist $\mathcal{G} = (G, \sigma)$

wobei σ eine Fkt. ist, die den Symbolen $\oplus, \odot$ entsprechende Operationen zuweist.

Wir repräsentieren die zwei Symbole durch zwei verschiedene Mengen: $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.

σ soll eine Funktion werden mit

$$\mathrm{Def}(\sigma) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$\sigma(\emptyset) \in G$$

$$\sigma(\{\emptyset\}) : G \times G \longrightarrow G$$

Dies ist eine mengentheoretische Rekonstruktion des Begriffs als $\{\oplus, \odot\}$-Struktur.

Gruppenaxiome:

(A) $\forall x \forall y \forall z \quad x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$

(N) $\forall x \quad x \oplus 0 = \boxed{0 \oplus x = x}$ *

(I) $\forall x \exists y \quad x \oplus y = \boxed{y \oplus x = 0}$ *

Übersetzung in die obige Struktur $\mathcal{G}$:

* $\forall x \, (x \in G \longrightarrow ((\sigma(\emptyset), x), x) \in \sigma(\{\emptyset\}))$

* $\forall x \, (x \in G \longrightarrow \exists y \; y \in G \wedge ((y, x), \sigma(\emptyset)) \in \sigma(\{\emptyset\}))$

alles LST-Formeln [modulo erlaubten Abkürzungen in FST]

$\sigma(\{\emptyset\}) : G \times G \longrightarrow G$

$\sigma(\{\emptyset\}) \subseteq (G \times G) \times G$

interpretiert als

$((x, y), z) \in \sigma(\{\emptyset\})$

$\Longleftrightarrow$

$x \oplus y = z.$

Zusammenfassend:

es ex. eine LST-Formel Φ, die genau die <u>Gruppen</u> beschreibt.

<u>Allgemeiner</u>. Falls S eine endliche Menge von nichtlogischen Symbolen ist, so kann man für jedes Axiomensystem T für die Sprache L^S in FST die "Modelle von T" durch eine LST-Formel charakterisieren.

<u>2. Bsp.</u> <u>Ordnungen</u>

$S = \{R\}$. $\mathfrak{A} = (A, P)$ ist eine <u>partielle Ordnung</u> falls A Menge, $P \subseteq A \times A$ und P ist reflexiv, transitiv und anti-symmetrisch.

ORDNUNG IM SINNE VON $\leq$

$\mathfrak{A} = (A, P)$ ist eine <u>strikte partielle Ordnung</u> falls A Menge, $P \subseteq A \times A$ und P ist irreflexiv und transitiv.

ORDNUNG IM SINNE VON $<$

Bem. ① Ist (A,P) eine Ordnung im Sinne von $<$, so kann man

$$\overline{P} := P \cup \underbrace{\{(x,x);\ x \in A\}}_{\{z \in A \times A;\ \exists x\,(x \in A \wedge z = (x,x))\}}$$

Dann ist $(A,\overline{P})$ eine Ordnung im Sinne von $\leq$.

② Ist (A,P) Ordnung i.S.v. $\leq$, so def.

$$\hat{P} := P \setminus \{(x,x);\ x \in A\}$$

Dann ist $(A,\hat{P})$ eine Ordnung i.S.v. $<$.

---

3. Bsp. Falls X eine Menge und $R \subseteq X \times X$ eine Relation, so heißt R Äquivalenzrelation falls sie reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

$E \subseteq X$ heißt R-Äquivalenzklasse falls $\exists x\,(x \in E \wedge \forall y\,(y \in E \longleftrightarrow (y,x) \in R))$

Dies ist eine ZST-Formel und somit können wir mit (Aus) aus Pot(X) die R-Äquivalenzklassen aussondern:

$$X/R := \{E \in \text{Pot}(X) ;\ \underline{E \text{ ist}}\ \underline{R\text{-Äquivalenzklasse}}\}$$

Wie üblich in der Mathematik:
wenn die Äquivalenzrelation R sich mit den Operationen in σ einer S-Struktur $\mathfrak{A} = (A, \sigma)$ verträgt, so kann man Operationen auf A/R wohldefinieren und erhält die Quotientenstruktur

$$\left(A/R, \overline{\sigma}\right)$$ wobei $\overline{\sigma}$ die entsprechenden Wohldef. sind.

Auch in FST:

<u>Theorem</u> (Satz von Cantor)

Es gibt keine Surjektion von x auf $\mathrm{Pot}(x)$.

[<u>Bem.</u> "Injektion" wird durch die Formel
$\forall x \forall x' \forall y \; (x,y) \in f \wedge (x',y) \in f \rightarrow x = x'$
definiert;
"Surjektion" durch $\mathrm{Bild}(f) = y$;
"Bijektion" durch Inj + Surj.]

<u>Beweis</u> Sei $f : x \longrightarrow \mathrm{Pot}(x)$. z.z. f ist keine Surjektion. Dazu: konstruiere $D \subseteq x$, so daß $D \notin \mathrm{Bild}(f)$.

$$\underline{\underline{D}} := \{ \underline{w \in x} ; \underline{w \notin f(w)} \}$$

ENTSTEHT DURCH AUSSONDERUNG AUS x.

Klar: $D \subseteq x$.

Ang. $D \in \mathrm{Bild}(f)$. Dann ex. $d \in x$ mit $D = f(d)$

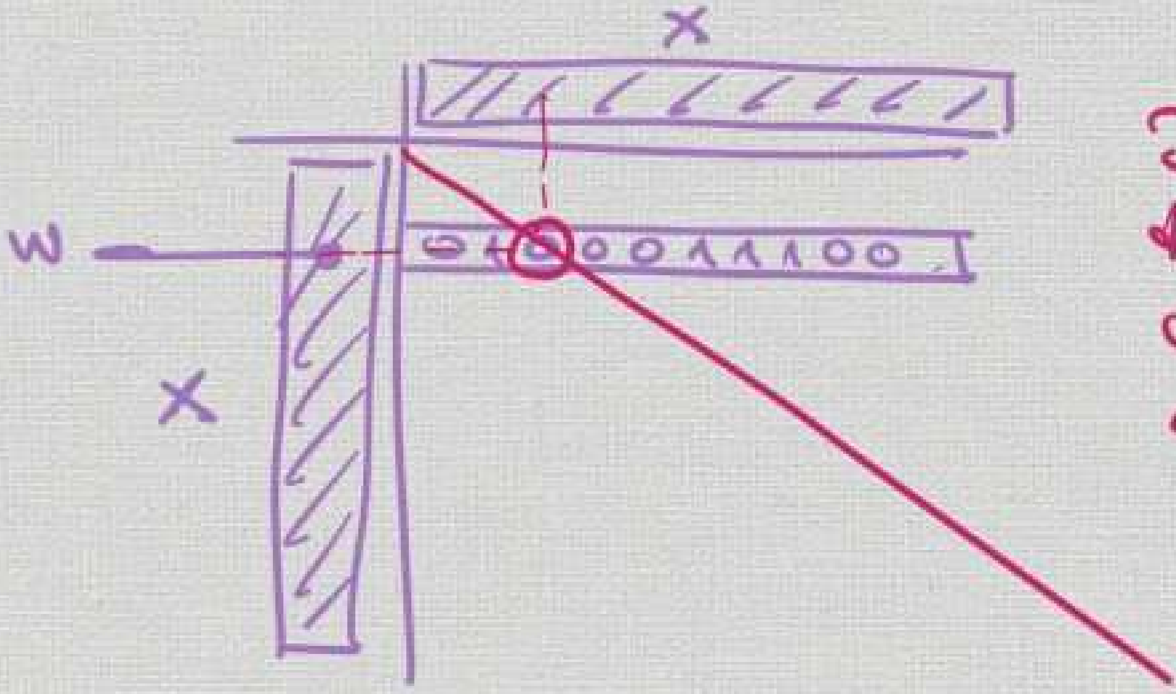
$$d \in D \iff d \notin f(d) \iff d \notin D$$

Widerspruch!

q.e.d.

Bem. Dieser Beweistyp ist derselbe wie bei
1. Russell-Antinomie
2. Aus $\longrightarrow \neg$ Univ

Diese Beweise heißen DIAGONALISIERUNGSBEWEISE:



D wird so definiert, daß der Wert von der Diagonale abweicht.

FAZIT FST kann bereits viel Mathematik. Viele Mengen werden von FST garantiert.

Aber nicht alle:

Fall 1 Mengen, die nicht existieren können:

(a) Die Menge aller Mengen. [widerspricht Aus]

(b) Die Menge aller Einermengen:
$\rightsquigarrow$?? $\{\{x\}; x$ ist Menge$\}$

Dies ist nicht möglich:

Ang. S sei die Menge aller Einermengen.

Nach $\bigcup$-Ax, bilde $\bigcup S$.

Beh. $\bigcup S$ ist universell.

[Und somit nach (a) ein Widerspruch]

Sei x beliebig, nach (Paar) existiert $\{x\} \in S$. Dann ist $x \in \bigcup S$.

[Bem. Wir haben verwendet: Aus für (a),

$\bigcup$-Ax zur Konstr. von $\bigcup S$,

u-Ax & Pot zur Gültigkeit von Paar.]

(c) Genauso:

Keine Menge aller Paare.

(d) Ebenso:

Keine Menge aller Gruppen.

Eine Gruppe war $\mathcal{G} = (G, \sigma)$

Falls $\{x\}$ eine einelementige Menge ist, so definiert

$\sigma(\emptyset) = x$

$\sigma(\{\emptyset\}) = x \longmapsto x$

eine Gruppe $\mathcal{G}$ mit $G = \{x\}$.

Also ist $x \in \{x\}$ und somit

$$x \in \bigcup \bigcup \bigcup \mathcal{G} \text{ mit}$$

$$\mathcal{G} = (\{x\}, \mathfrak{A}).$$
$$= \{\{\{x\}\}, \{\{x\}, \mathfrak{A}\}\}$$

Also ist $\bigcup \bigcup \bigcup \mathcal{G}$ universell.

Fall 2 Mengen, deren Existenz nicht erzwungen wird:

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ usw.

"konkrete Mathematik".

Unser nächstes Ziel ist zu sehen, daß diese Mengen nicht notwendigerweise in FST-Modellen existieren müssen.

Theorem Es ex. $\mathfrak{A} = (A, E) \models FST$, welches ein lokalendlicher Graph ist.

Bem. Damit gibt es in $\mathfrak{A}$ keinen vernünftigen Kandidaten für $\mathbb{N}$. In VL XII werden wir zu FST ein weiteres Axiom hinzufügen, welches uns solche Mengen garantiert.

Beweis Verwendet die Idee der Konstruktion aus G4. Die Konstruktion erfolgt in Schritten

$$\mathfrak{A}_n = (A_n, E_n),$$

so daß

- A_n endlich ist
- $\mathfrak{A}_{n+1}$ eine Endenerweiterung von $\mathfrak{A}_n$ ist (d.h. falls $x, y \in A_n$ und $x E_{n+1} y$, so $x E_n y$ und falls $x E_{n+1} y \Longrightarrow y \in A_{n+1} \setminus A_n$ und $x \in A_n$)

Zum Schluß:

$$A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \qquad \mathfrak{A} = (A, E)$$

$$E := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$$

Die Elemente von A sollen natürliche Zahlen sein, so daß $A = \mathbb{N}$.

$$\mathfrak{A}_0 = (A_0, E_0) \quad A_0 = \{0\}, \; E_0 = \emptyset$$

Bild: $\bullet\ \mathfrak{A}_0$

Schritt von n auf $n+1$.

Sei $\mathfrak{A}_n = (A_n, E_n)$ gegeben mit

$$A_n = \{0, 1, 2, \dots, k\}$$

Betrachte $\mathrm{Pot}(A_n)$. Wir sagen $X \in \mathrm{Pot}(A_n)$ ist **bedient**, falls ein $l \leq k$ existiert mit

$$X = \mathrm{Ext}_{\mathfrak{A}_n}(l).$$

Da wir induktiv wollen, daß $\mathfrak{A}_n \models \mathrm{Ext}$, ist l eindeutig bestimmt. Nach dem Satz von Cantor gilt, daß nicht alle Elemente von $\mathrm{Pot}(A_n)$ bedient sein können. Sei also

$$N_n = \{X_1, \dots, X_m\}$$

die Menge aller nicht bedienten Teilmengen.

Dann gilt $m \geq 1$.

$$\underbrace{\underbrace{0, 1, \dots, k}_{A_n},\ \overset{X_1}{\overset{\updownarrow}{k+1}},\ \dots,\ \overset{X_m}{\overset{\updownarrow}{k+m}}\}}_{A_{n+1}} =: A_{n+1}$$

- Falls $i, j \leq k$, so
$$i E_{n+1} j :\Longleftrightarrow i E_n j$$
- Falls $j = \underline{k+\ell}$, so
$$\underline{i} E_{n+1} j :\Longleftrightarrow i \in \underline{X_\ell}.$$

Dann ist $\mathfrak{A}_{n+1} = (A_{n+1}, E_{n+1})$ eine endliche, extensionale Endeserweiterung von $\mathfrak{A}_n$.

$$A := \bigcup A_n = \mathbb{N}$$
$$E := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n .$$

<u>Def.</u> Falls $n \in A$, so heiße k das <u>Geburtsdatum</u> von n, falls k minimal ist, so daß $n \in A_k$. Schreibe $GD(n)$.

<u>Dann gilt</u> nach Konstruktion

$$(*) \quad n E m \Longrightarrow GD(n) < GD(m)$$

Daraus folgt:

$$(**) \quad GD(x) = \max\{GD(y) ; y \in Ext_E(x)\} + 1.$$

Beh. $\mathfrak{A} \models FST$.

1. Extensionalität gilt nach Konstruktion.
2. Aus

   Sei x eine Menge mit $GD(x) = n$.
   Nach (*) gilt für alle $y \in Ext_E(x)$

   $$GD(y) < n.$$

   Ist also z eine Instanz des Aussonderungsaxioms, so gilt

   $$Ext_E(z) \subseteq Ext_E(x),$$

   somit wird diese Menge spätestens im Schritt n bedient:

   $$GD(z) \leq n.$$

3. $\cup$-Ax

   $x, y \in A$

   Finde k mit $\begin{matrix} Ext_E(x) \\ Ext_E(y) \end{matrix} \subseteq A_k$.

   Also ist $Ext_E(x) \cup Ext(y) \subseteq A_k$.
   Somit wird diese Menge in A_{k+1} spätestens bedient.

4. $\bigcup$-Ax genauso.
5. Pot Sei $x \in A$ mit $GD(x) = n$.
   Nach dem Argument in 2. gilt: Falls

$y \in A$ mit y ist Ω-TM von x,
so ist $QD(y) \leq n$.
Also sind alle Ω-TM von x in A_n
bedeckt und somit wird die Menge
aller Ω-TM von x in A_{n+1} bedeckt.

q.e.d.