MLML X

10. Mai 2021

Axiome der Mengenlehre (EBBINGHAUS, Kapitel III)

Extensionalitätsaxiom (Ext):

Umfangsgleiche Mengen sind gleich.

Also:

$$\forall xy\,(\forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y) \;\rightarrow x = y).$$

Schema der Aussonderungsaxiome (Aus): Das Schema enthält zu jedem Ausdruck der Gestalt $\varphi(z, \overset{n}{x})$[3] aus der ursprünglichen mengentheoretischen Sprache das Axiom

Zu allen $x_1, \ldots, x_n$ und allen x gibt es ein y, das genau diejenigen Elemente z von x enthält, für die $\varphi(z, \overset{n}{x})$ gilt.

Also:

$$\forall \overset{n}{x}\, \forall x \exists y \forall z\,(z \dot\in y \leftrightarrow z \dot\in x \wedge \varphi(z, \overset{n}{x})).$$

„Kleines“ Vereinigungsmengenaxiom ($\cup$-Ax):

Zu je zwei Mengen x und y gibt es eine Menge, die alle Elemente von x und y enthält.

Also:

$$\forall xy\,\exists w\,\forall z\,(z \in x \vee z \in y \rightarrow z \in w).$$

„Großes“ Vereinigungsmengenaxiom ($\bigcup$-Ax):

Zu jeder Menge X gibt es eine Menge, die alle Elemente der Elemente von X enthält.

Also:

$$\forall X\, \exists y \forall x\, z\,(x \dot\in X \wedge z \dot\in x \rightarrow z \dot\in y).$$

Potenzmengenaxiom (Pot):

Zu jeder Menge x gibt es eine Menge, die alle Teilmengen von x enthält.

Also:

$$\forall x \exists y \forall z\,(z \subseteq x \rightarrow z \in y).$$

[(Leer) $\exists x\, \forall z\, \neg z \dot\in x$]

[(stPaar) $\forall x \forall y \exists p \forall z\, (z \dot\in p \longleftrightarrow (z = x \vee z = y))$]

[(Univ) $\exists x\, \forall z\; z \dot\in x$] (Paar) $\forall x \forall y \exists z\,(x \dot\in z \wedge y \dot\in z)$]

Bereits gesehen: Aus $\models$ Leer.

Satz $\{\text{Pot}, \cup\text{-Ax}\} \models \text{Paar}$.

Beweis Sei $\mathfrak{A} \models \text{Pot} \wedge \cup\text{-Ax}$. $\quad \mathfrak{A} = (A, E)$

Wir überlegen uns, daß für jedes $a \in A$ gilt: a ist $\mathfrak{A}$-Teilmenge von a

informell

Also: Ist b eine $\mathfrak{A}$-Potenzmenge von a, so ist aEb.

Wähle nun $a, b \in A$ beliebig und $\bar{a}, \bar{b} \in A$ seien $\mathfrak{A}$-Potenzmengen von a, b, respective.

Dann gilt:

$$a E \bar{a} \quad \text{und} \quad b E \bar{b}.$$

Nach $\cup$-Ax ex. ein $c \in A$ mit
für alle x: $x E \bar{a} \lor x E \bar{b} \longrightarrow x E c$.

Somit gilt $a E c$ und $b E c$

Das zeigt das schwache Paarmengenaxiom.

q.e.d.

Bereits angekündigt:

<u>Theorem</u> $\quad$ Aus $\models \neg$ Univ.

<u>Beweis</u> Sei $\underline{\Phi}(z) :\equiv \neg z \dot{\underline{E}} z$ die Russell-Formel. <u>Idee</u>: Sondere aus der universellen Menge nach der Russell-Formel aus!

Sei nun $a \in A$ <u>universell</u>, also f.a. $b \in A$ gilt $b \underline{E} a$. [Arg. für Widerspruch: $\mathfrak{A} \models$ Aus + Univ.]

Nach Aus können wir gemäß $\underline{\Phi}$ aus $\underline{a}$ aussondern. Erhalte $r \underline{\in} A$ mit

informell

<u>$\forall b \in A$</u>:

$$b E r \iff b E a \land \underline{\Phi}(b)$$
$$\iff b E a \land \text{NICHT } b E b$$

$b := r$

$$\iff \text{NICHT } b E b.$$

Mit $b := r$ erhalten wir

$$r \in r \iff \text{NICHT } r \in r.$$

Dies ist ein Widerspruch! q.e.d.

<u>Bem.</u> Informell kann man sich dieses Theorem als "es gibt keine Menge aller Mengen" merken.

Wir wollen das Axiomensystem

$$\text{Ext} + \cup\text{-Ax} + \underline{\bigcup\text{-Ax}} + \underline{\text{Pot}} + \text{Aus}$$

als FST bezeichnen:

FINITE SET THEORY
[endliche Mengenlehre]

<u>Bem. 1</u> FST impliziert <u>NICHT</u>, daß alles endlich ist, aber ist konsistent damit, daß alles endlich ist.

<u>Def.</u> Ein gerichteter Graph $\mathfrak{A} = (A, E)$ heißt <u>lokalendlich</u> genau für jedes $a \in A$ die Menge $\text{Ext}(a)$ eine endliche Menge ist.

Die vorige Bemerkung können wir dann also wie folgt formulieren:

<u>Thm</u> Es ex. ein unendlicher lokalendlicher Graph $\mathfrak{A} = (A, E)$ mit $\mathfrak{A} \models FST$.

[Unendlich notwendig, da bereits Leer + Paar impliziert, daß $\mathfrak{A}$ unendlich sein muß.]

Beweis in VL $\overline{XI}$.

<u>Bem 2.</u> FST ist in der Tat die Standardtheorie der Mengenlehre der endlichen Mengen.

FUNKTIONALE SPRACHERWEITERUNGEN.

Falls $\mathcal{L} = L^S$ eine Sprache erster Stufe ist und R ein n-stelliges Relationssymbol, welches nicht in $\mathcal{L}$ vorkommt.

Sei nun Φ eine $\mathcal{L}$-Formel mit n freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Dann können wir die Bedeutung von R durch Φ definieren:

$\boxed{Rt_1 \ldots t_n}$ sei wahr $:\Longleftrightarrow$

$$\Longrightarrow \quad \mathfrak{A}\frac{t_1 \ldots t_n}{x_1 \ldots x_n} \models \Phi .$$

Bsp. Das Relationssymbol $\subseteq$ in der Sprache LST definiert durch

$$\Phi(x,y) \;:\Longleftrightarrow\; \forall z\,(z \in x \rightarrow z \in y)$$

wird syntaktisch ersetzt durch

$$\Phi\frac{t_1 \ldots t_n}{x_1 \ldots x_n} \quad [\text{Substitutionsfunktion}].$$

Sei nun $\mathcal{L}^*$ die Sprache L^{S^*} mit

$$S^* := S \cup \{R\}.$$

Falls φ eine $\mathcal{L}^*$-Formel ist, so sei φ^* die $\mathcal{L}$-Formel, die durch syntaktisches Ersetzen von $Rt_1 \ldots, t_n$ durch $\Phi\frac{t_1 \ldots t_n}{x_1 \ldots x_n}$ entsteht. Dann sei $\mathfrak{A}^*$ die $\mathcal{L}^*$-Struktur, die $\mathfrak{A}$ als $\mathcal{L}$-Redukt hat und bei der R durch

Φ interpretiert wird. Dann gilt

$$\mathfrak{A}^* \models \varphi \iff \mathfrak{A} \models \varphi^*.$$

Was, wenn $\mathcal{L} = L^S$ und f ein nicht in S vorkommendes n-stelliges Funktionssymbol ist?

Sei nun Φ eine $\mathcal{L}$-Formel mit $n+1$ freien Variablen: $x_1, \ldots, x_n, y$

Interpretiere

$$f t_1 \ldots t_n \equiv z \quad \text{durch } \Phi \frac{t_1 \ldots t_n\, z}{x_1 \ldots x_n\, y}$$

PROBLEM Im allgemeinen definiert diese Zeile nicht notwendigerweise eine Funktion.

$$Ex_\Phi \quad \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \exists y\, \Phi(x_1, \ldots x_n, y)$$

$$End_\Phi \quad \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \ldots \forall x_n \forall y \forall y' \left(\Phi(x_1, \ldots x_n, y) \wedge \Phi(x_1, \ldots x_n, y') \longrightarrow y \equiv y' \right).$$

D.h. ist $\underline{\Phi}$ so beschaffen, daß $Ex_{\underline{\Phi}}$ und $End_{\underline{\Phi}}$ gelten, so können wir für die erweiterte Sprache $\mathcal{L}^* = L^{S^*}$ mit $S^* = S \cup \{f\}$ eine erweiterte Struktur $\mathfrak{A}^*$ definieren und eine Übersetzung $\varphi \longmapsto \varphi^*$, wobei φ ein $\mathcal{L}^*$-Ausdruck und φ^* ein $\mathcal{L}$-Ausdruck ist mit

$$\mathfrak{A}^* \models \varphi \iff \mathfrak{A} \models \varphi^*.$$

ZUSAMMENFASSEND:

Falls T eine Menge von $\mathcal{L}$-Sätzen ist, so daß $T \models Ex_{\underline{\Phi}} \wedge End_{\underline{\Phi}}$, so kann man die Sprache $\mathcal{L}$ um ein Funktionssymbol f erweitern, welches durch $\underline{\Phi}$ interpretiert wird.

FST beweist Existenz und Eindeutigkeit für:

$$x \longmapsto \{x\}$$

$$x, y \longmapsto \{x, y\}$$

$$x, y \longmapsto x \cup y$$

$$x \longmapsto \bigcup x$$

$$x \longmapsto \mathrm{Pot}(x)$$

$$x, x_1, \dots, x_n \longmapsto \{z \in x \,;\, \varphi(z, x_1, \dots, x_n)\}$$

Falls $\mathfrak{A} \models \mathrm{FST}$, so können wir also all diese Notationen verwenden und im Sinne der funktionalen Spracherweiterungen interpretieren.

*

Schnitt? Der Schnitt zweier Mengen kann über Aussonderung definiert werden:

$$x, y \longmapsto x \cap y := \{z \in x \,;\, z \in y\}$$

NACH AUSSONDERUNG EX. DIESE MENGE; NACH EXT EINDEUTIG

WAS KANN FST?

(Ebbinghaus, Kapitel IV)

Bsp. Können wir Funktionen beschreiben?
Was ist eine Funktion?

Moderner Zugang

Eine Funktion $f: X \longrightarrow Y$ ist eine **Relation** zwischen X und Y, bei der der Y-Wert von f eindeutig durch den X-Wert vorgegeben ist. [Und: für jedes x ex. ein Y-Wert.]

Ansonsten: partielle Funktion

↪ Was ist denn eine Relation zw. X und Y?

Moderner Zugang

Einfach nur eine Teilmenge R von Paaren $(x,y) \in X \times Y$, gelesen als "x steht in Relation R zu y" gdw $(x,y) \in R$.

↪ Was sind (x,y) und $X \times Y$?

PROBLEM Haben ein Paar $\{x,y\}$, aber dies ist nicht das geordnete Paar, sondern das ungeordnete Paar.

Frage: Kann man mithilfe des ungeordneten Paares ein geordnetes Paar definieren?

D.h. eine Funktion

$$(x,y) := \ldots ? \ldots$$

so daß

(*) $\boxed{(x,y) = (x',y') \text{ gdw } x = x' \text{ und } y = y'.}$

Lösung (Kuratowski)

$$(x,y) := \{\{x\},\{x,y\}\}$$

Beliebte Erstsemesterübungsaufgabe: zeigen Sie, daß Kuratowskis Definition die Bed. (*) erfüllt.

$$\Phi_{\mathrm{Kur}}(p) :\Longleftrightarrow \exists x \exists y \exists s \exists d \forall z$$
$$(z \in s \longleftrightarrow z \equiv x) \wedge$$
$$(z \in d \longleftrightarrow z \equiv x \vee z \equiv y) \wedge$$
$$(z \in p \longleftrightarrow z \equiv s \vee z \equiv d)$$

Dies ist eine Formel in LST.

$$\Phi^*_{KUR}(p,x,y) :\Longleftrightarrow$$

$$\exists s \exists d \forall z$$

$$(z\in s \longleftrightarrow z \equiv x) \wedge$$

$$(z\in d \longleftrightarrow z\equiv x \vee z\equiv y) \wedge$$

$$(z\in p \longleftrightarrow z\equiv s \vee z\equiv d)$$

$\boxed{p \text{ ist das Paar } (x,y)}$

2. Frage Was ist $X\times Y$?

Die Menge der Paare (x,y) mit $x\in X$ und $y\in Y$.

$$\Psi(X,Y,p)\ \boxed{\exists x \exists y\ (x\in X \wedge y\in Y \wedge \Phi^*_{KUR}(p,x,y))}$$

Wann gibt es eine Menge all dieser Paare?
Hierfür muß ich mit der Formel $\Psi(X,Y,p)$
aus einer Menge aussondern.

Wo lebt z.B. $\{x\}$? $\{x\}\subseteq X\subseteq X\cup Y$

$x\in X$ $\{x,y\}$? $\{x,y\}\subseteq X\cup Y$

$y\in Y$

$$\{x\},\{x,y\}\in Pot(X\cup Y)$$

$$\{\{x\},\{x,y\}\}\in Pot(Pot(X\cup Y))$$

Damit kann ich definieren:

$$X \times Y := \{ p \in \mathrm{Pot}(\mathrm{Pot}(X \cup Y)) ; \Phi(X, Y, p) \}$$

Zusammenfassend:

FST impliziert, daß für je zwei Mengen X und Y eine Menge $X \times Y$ existiert mit

$$p \in X \times Y \iff \Phi(X, Y, p)$$

Damit: R ist eine Relation zwischen X und Y gdw $R \subseteq X \times Y$.

Falls $R \subseteq X \times Y$, so definiere

$$\mathrm{Def}(R) := \{ x \in X ; \boxed{\exists y (y \in Y \wedge (x,y) \in R)} \}$$

[Aussonderung aus X mit Formel $\boxed{}$]

$$\mathrm{Bild}(R) := \{ y \in Y ; \exists x (x \in X \wedge (x,y) \in R) \}$$

R ist <u>funktional</u> falls

f.a. x, y, y' gilt

$$(x,y) \in R \wedge (x,y') \in R \longrightarrow y = y'.$$

Eine Relation R heißt <u>Funktion von X nach Y</u> gdw

$$\boxed{R \subseteq X \times Y \ \wedge \ \mathrm{Def}(R) = X \ \wedge \ R \text{ ist funktional}}$$

$\Xi(R,X,Y)$ eine Formel der Sprache LST

Somit definiere man

$$\mathrm{Funk}(X,Y) := \{ R \in \mathrm{Pot}(X \times Y) ; \ \Xi(R,X,Y) \}$$