# Mathematische Logik & Mengenlehre

MLML

3. MAI 2021

## Achte Vorlesung

## II. TEIL : Axiomatische MENGENLEHRE


Wir beantworten nicht die Frage:

Was ist eine Menge?

Bsp. Gruppentheorie

Math. Phänomene:
- Drehungen & Spiegelungen
- Permutationen

Abstraktion führt zum Begriff der Gruppe

| | Mengenlehre | Gruppentheorie | Körpertheorie |
|---|---|---|---|
| Objekte | Mengen | Bewegungen Permutationen | reelle / komplexe Zahlen |
| Strukturen | MODELLE DER MENGENLEHRE | Gruppen | Körper |

# Zweites Bsp.

## Axiomatik der Arithmetik

**ARITHMETICES PRINCIPIA.**

§ 1. De numeris et de additione.

*Explicationes.*

Signo N significatur *numerus (integer positivus).*
» 1 » *unitas.*
» $a+1$ » *sequens a, sive a plus 1.*
» $=$ » *est aequalis.* Hoc ut novum signum considerandum est, etsi logicae signi figuram habeat.

*Axiomata.*

1. $1 \in N$.
2. $a \in N . Ɔ . a = a$.
3. $a, b, c \in N . Ɔ : a = b . = . b = a$.
4. $a, b \in N . Ɔ \therefore a = b . b = c : Ɔ . a = c$.
5. $a = b . b \in N : Ɔ . a \in N$.
6. $a \in N . Ɔ . a + 1 \in N$.
7. $a, b \in N . Ɔ : a = b . = . a + 1 = b + 1$.
8. $a \in N . Ɔ . a + 1 -= 1$.
9. $k \in K \therefore 1 \in k \therefore x \in N . x \in k :Ɔ_x . x + 1 \in k :: Ɔ . N Ɔ k$.

*Definitiones.*

10. $2 = 1 + 1;\ 3 = 2 + 1;\ 4 = 3 + 1;$ etc.

Peano, Arithmetices principia. 1

Peano-Axiome

1. 0 ist kein Nachfolger einer anderen Zahl.
2. Die Nachfolgefkt. ist injektiv.
3. Prinzip der vollst. Ind.

[z.B. im EFT]

Sprache:
Latino sine flexione.

Die folgenden Fragen werden von den Peano-Axiomen nicht beantwortet:

- Was ist die 0?
- Was ist eine Zahl?
- Was ist die Nachfolgeroperation?

Drittes Bsp. Euklidische Axiomatik der Geometrie

[Euklid selbst hatte Axiome, welche versuchten die Natur des Punkts / der Gerade / der Ebene zu fassen.]

Axiomatische Mengenlehre.

Finde Sprache $L^S$ und Axiome $\Phi$, so daß $\mathfrak{A}$ eine S-Struktur echte Modell der Mengenlehre ist gdw $\mathfrak{A} \models \Phi$.

## KONVENTIONEN

① Objekte sollen nicht mehrfach in Mengen vorkommen:

$$\boxed{\{x,x\}} = \{x\}.$$

[Nebenbem. In Stochastik/Kombinatorik gibt es manchmal sog. Multimengen bei denen die Multiplizität der Elemente gezählt wird. Diese wollen wir nicht betrachten.]

② Die Reihenfolge der Objekte in einer Menge soll irrelevant sein:

$$\{x,y\} = \{y,x\}$$

[Im Gegensatz zu Tupeln: $(x,y) \neq (y,x)$, falls $x \neq y$.]

Das dahinterstehende Grundprinzip ist das der

EXTENSIONALITÄT.

Eine Menge ist eindeutig durch ihre Elemente bestimmt und nicht:

- Reihenfolge der Schreibweise
- Beschreibung der Menge
- Entstehungsgeschichte der Menge
- ....

INTENSIONALITÄT.

---

Was ist denn die Sprache der Mengenlehre?

$\cap$ ← binäre Op.

$\cup$ ← binäre Op.

$\emptyset$ ← konst.

binäre Op.

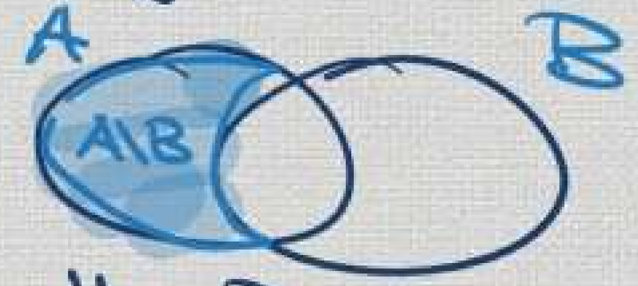
$\setminus$ ← mengentheoretische Differenz

$\{\dots\}$ ← $\{x,y\}$, $\{x,x\}$, $\{x\}$

? n-stellige Op. falls $\{x_1, \dots, x_n\}$

$\subseteq$ ← binäre Relation

Alles typische Symbole der „Mengenlehre"




Venn-Diagramm

Wir werden keine Sprache mit Symbolen
$\cup, \cap, \emptyset, \setminus, \{\dots\}$ usw. wählen, sondern die
sparsamste mögliche Sprache, in der wir diese
Operationen alle definieren können.

LANGUAGE OF SET THEORY

Sprache der Mengenlehre $\mathcal{L}_\in$, LST

$$\underline{S = S_R = \{\in\}} \qquad \sigma(\in) = 2.$$

Elementsymbol
Epsilonsymbol.

Dies ist überraschend sparsam, aber

$$x = \emptyset \iff \forall z \neg z \in x$$

$$z \in x \cup y \iff (z \in x \vee z \in y)$$

$$z \in \{x, y\} \iff \underbrace{(z \equiv x \vee z \equiv y)}$$

Ausdrücke einer reicheren Sprache, die wir in LST rekonstruieren können.

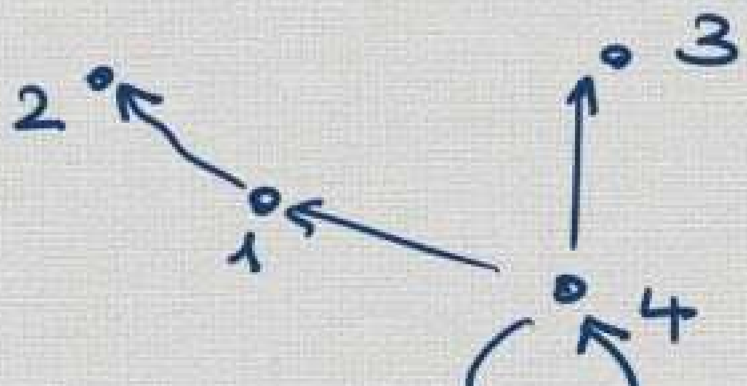
S-Ausdrücke für $S = S_R = \{\in\}$

## S-Strukturen für $S = S_R = \{\in\}$.

Was ist eine S-Struktur?

$$\mathfrak{A} = (A, \in^{\mathfrak{A}})$$

zweistellige Relation.




GERICHTETER GRAPH.

S-Strukturen sind gerichtete Graphen, wobei wir im Bild den Pfeil interpretieren

$a \longrightarrow b$ als $\mathfrak{A} \models a \in b$.

Bsp. für gerichtete Graphen

Falls A exakt ein Element hat; falls $A = \{a\}$


$\in^{\mathfrak{A}} = \emptyset$

$a \notin a$


$\in^{\mathfrak{A}} = \{(a,a)\}$

$a \in a$.

$\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$

$A = \{a, b\}$

<u>Zweielementige Strukturen</u>

| 10 Isomorphie-klassen | | Ext | Leer | Paar |
|---|---|---|---|---|
| $\boxed{a \quad b}$ | $Ext(a) = \emptyset$<br>$Ext(b) = \emptyset$ | ✗ | ✓ | ✗ Hier gibt es zwei verschiedene leere Mengen! |
| $\circlearrowleft a \qquad b$ | $Ext(a) = \{a\}$<br>$Ext(b) = \emptyset$ | ✓ | ✓ | ✗ |
| $a \longrightarrow b$ | $Ext(a) = \emptyset$<br>$Ext(b) = \{a\}$ | ✓ | ✓ | ✗ |
| $\circlearrowleft a \qquad b \circlearrowright$ | $Ext(a) = \{a\}$<br>$Ext(b) = \{b\}$ | ✓ | ✗ | ✗ |
| $\circlearrowleft a \longrightarrow b$ | $Ext(a) = \{a\}$<br>$Ext(b) = \{a\}$ | ✗ | ✗ | ✗ |
| $\circlearrowleft a \longleftarrow b$ | $Ext(a) = \{a, b\}$<br>$Ext(b) = \emptyset$ | ✓ | ✓ | ✗ |
| $a \rightleftarrows b$ | $Ext(a) = \{b\}$<br>$Ext(b) = \{a\}$ | ✓ | ✗ | ✗ |
| $\circlearrowleft a \rightleftarrows b$ | $Ext(a) = \{a, b\}$<br>$Ext(b) = \{a\}$ | ✓ | ✗ | ✗ |
| $\circlearrowleft a \longrightarrow b \circlearrowright$ | $Ext(a) = \{a\}$<br>$Ext(b) = \{a, b\}$ | ✓ | ✗ | ✗ |
| $\circlearrowleft a \rightleftarrows b \circlearrowright$ | $Ext(a) = \{a, b\}$<br>$Ext(b) = \{a, b\}$ | ✗ | ✗ | ✗ |

$$\forall x \forall y \left(\forall z \left(z \in x \leftrightarrow z \in y\right) \longrightarrow x \equiv y\right)$$

**Extensionalitätsaxiom (Ext):**

*Umfangsgleiche Mengen sind gleich.*

Also:

$\equiv$

$$\forall xy\,(\forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y).$$

In einem gerichteten Graphen $(A, R)$ definiere man

$$\mathrm{Ext}(a) := \{x \in A \,;\, xRa\}$$

für $a \in A$

Wir wollen sagen, daß $a$ und $b$ umfangsgleich (koextensional) sind, falls

$$\mathrm{Ext}(a) = \mathrm{Ext}(b).$$

Es gilt für $a, b \in A$

$$\mathfrak{A}\frac{a\,b}{x\,y} \models \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x \equiv y$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathrm{Ext}(a) = \mathrm{Ext}(b)$$

Hiermit können wir nun überprüfen, ob eine Struktur das Extensionalitätsaxiom erfüllt.

z.B.


$\mathrm{Ext}(a) = \{a\}$

Ein ganz einfaches Axiom:

<u>Leere Mengenaxiom</u>

$$\text{Leer} := \exists x \forall z \neg z \in x$$

Intuitiv: "es gibt eine leere Menge"

Falls $\mathfrak{A}$ ein gerichteter Graph ist und $a \in A$, so gilt

$$\mathfrak{A}\frac{a}{x} \models \forall z \neg z \in x \iff \mathrm{Ext}(a) = \emptyset.$$

Dann sagen wir: "a ist eine leere Menge in $\mathfrak{A}$".

---

Man beachte:

Falls $\mathfrak{A} \models \mathrm{Ext} \wedge \mathrm{Leer}$, so gibt es eine eindeutig bestimmte leere Menge in $\mathfrak{A}$.

Dies erlaubt es uns in $\mathfrak{A}$ das Symbol $\emptyset$ als zusätzliches Konstantensymbol zu verwenden.

[⇝ FUNKTIONALE SPRACHERWEITERUNGEN]

Was passiert mit $\{x\}$, $\{x,y\}$ ?

(Paar)

**„Paarmengenaxiom“ :** *Zu je zwei Mengen $x$ und $y$ gibt es eine Menge, die $x$ und $y$ als Elemente enthält.*

Mit **Aus** gelangt man dann von $x$ und $y$ zur Menge $\{x, y\}$, die genau aus $x$ und $y$ besteht, der *Paarmenge* von $x$ und $y$:

$$z \in \{x, y\} \;\leftrightarrow\; z = x \vee z = y.$$

$$\forall x \forall y \exists p (x \in p \wedge y \in p)$$

STÄRKERE VERSION

$$\forall x \forall y \exists p \forall z (z \in p \leftrightarrow (z \equiv x \vee z \equiv y))$$

Auch hier wieder:

$$\mathfrak{A}\frac{abc}{xyp} \models \forall z (z \in p \leftrightarrow z \equiv x \vee z \equiv y)$$

$$\iff \quad \mathrm{Ext}(c) = \{a,b\}.$$

Und somit:

Falls $\mathfrak{A} \models$ Ext + Paar, so ist das Paar von a und b eindeutig bestimmt und wir dürfen [FUNKTIONALE SPRACH-ERWEITERUNG] das Symbol $\{a,b\}$ in der Sprache als zusätzliches binäres Fkt. symbol verwenden.

Man beachte, daß (Paar) auch das "Einermengenaxiom":

$$\forall x \exists s \forall z (z \in s \longleftrightarrow z = x)$$

impliziert. Man wende (Paar) auf $x = y$ an.

---

Anwendung auf unsere zweielementigen Strukturen:

Falls $A = \{a, b\}$, so erzwingt Paar, daß es Objekte $x, y, z$ gibt mit

$$Ext(x) = \{a\}$$
$$Ext(y) = \{b\}$$
$$Ext(z) = \{a, b\}$$

Also insbesondere drei verschiedene Objekte

Dieses Argument impliziert:

THEOREM Keine zweielementige Struktur ist ein Modell von Paar.

## Stärkere Version dieses Theorems:

**Theorem** Falls $\mathfrak{A} \models \text{Leer} \wedge \text{Paar}$, so muß $A$ unendlich sein.

**Beweis** VL IX.

**Bem.** Extensionalität nicht nötig!

---

**Frage** Einelementige Strukturen?

Ext ✓

Leer ✓

Paar ✗

Ext ✓

Leer ✗

Paar ✓

$$\forall \underset{a}{x}\, \forall \underset{a}{y}\, \exists p\, \forall z\, (z \in p \leftrightarrow z = x \vee z = y)$$

Suche nach $p$ mit $\mathrm{Ext}(p) = \{a\}$.

D.h. in diesem Modell haben wir $\{a\} = a$.

$$x \subseteq y \;:\iff\; \forall z(z \in x \longrightarrow z \in y)$$

RELATIONALE SPRACHERW. (#4.1)

**Potenzmengenaxiom (Pot):**

*Zu jeder Menge $x$ gibt es eine Menge, die alle Teilmengen von $x$ enthält.*

Also:

$$\forall x \exists y \forall z (z \subseteq x \to z \in y).$$

STÄRKERE VERSION

$$\forall x \exists y \forall z ( z \subseteq x \leftrightarrow z \in y)$$

Man beachte, daß

$$\mathfrak{A}\frac{a\,b}{x\,y} \models \underbrace{\forall z (z \in x \longrightarrow z \in y)}_{x \boxed{\subseteq} y}$$

$$\iff \quad Ext(a) \subseteq Ext(b)$$

Auch hier: um zu überprüfen, ob eine Potenzmenge existiert, überprüfe zunächst, was die "Teilmengen" sind und schaue ob es ein $x$ gibt mit

$$y \in Ext(x) \iff y \text{ ist "Teilmenge".}$$

Wenn ja, so ist $x$ eine Potenzmenge.