SS2021 **MLML VII** 28. April 2021

§ 3.8 SUBSTITUTION

$$\begin{tikzcd}
\exists z\ z+z\equiv x \arrow[r, "\text{subst.}"', "\text{z durch y}"] \arrow[dr, "\text{subst.}"', "\text{z durch x}"] & \exists y\ y+y\equiv x \arrow[d, phantom, "\not\Leftrightarrow"] \\
 & \exists x\ x+x\equiv x
\end{tikzcd}$$

Ziel: Wir wollen eine Substitutionsfunktion

$\varphi\frac{y}{x}$ "nimm φ und ersetze x durch y",

die das obige Problem umgeht?

Wir müssen uns entscheiden, ob wir simultan oder sukzessive substituieren wollen:

Bsp. $\varphi := x+x\equiv y+y$

$$\begin{tikzcd}
 & x+x\equiv y+y \arrow[dl, "\text{ersetze y durch z}"'] \arrow[d, "\text{ersetze x durch y}"] \\
x+x\equiv z+z \arrow[d, "\text{x durch y}"'] & y+y\equiv y+y \arrow[d, "\text{ersetze y durch z}"] \\
y+y\equiv z+z \arrow[r, phantom, "\neq"] & z+z\equiv z+z
\end{tikzcd}$$

D.h. das Ergebnis der Substitution hängt von der Reihenfolge ab.

EFT wählen die SIMULTANE SUBSTITUTION

TERMSUBSTITUTION (per Rekursion nach Termaufbau)

3.8.1 Definition

(a) $x\boxed{\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}} := \begin{cases} x, & \text{falls } x \neq x_0, \ldots, x \neq x_r \\ t_i, & \text{falls } x = x_i \end{cases}$

(b) $c\boxed{\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}} := c$

(c) $[ft'_1\ldots t'_n]\boxed{\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}} := f\boxed{t'_1\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}}\ldots\boxed{t'_n\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}}$

Substitution beim Integrieren:

$g(x) = x^2 + x$

Substituiere $x \mapsto x^3$

$\rightsquigarrow (x^3)^2 + x^3$

$= x^6 + x^3$

FORMELSUBSTITUTION (per Rekursion nach Formelaufbau)

3.8.2 Definition

(a) $[t'_1 \equiv t'_2]\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r} := \boxed{t'_1\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}} \equiv \boxed{t'_2\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}}$

(b) $[Rt'_1\ldots t'_n]\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r} := R\boxed{t'_1\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}}\ldots\boxed{t'_n\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}}$

A3 (c) $[\neg\varphi]\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r} := \neg[\varphi\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}]$

$A4_\vee$ (d) $(\varphi \vee \psi)\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r} := \left(\varphi\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r} \vee \psi\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}\right)$

Def. x_i ist relevant für $\exists x\varphi\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}$ falls diese Bed. gelten.

$A5_\exists$ (e) Seien $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$ $(i_1 < \ldots < i_s)$ die Variablen x_i unter $x_0, \ldots, x_r$ mit

$$x_i \in \text{frei}(\exists x\varphi) \text{ und } x_i \neq t_i.$$

RELEVANTE VARIABLEN

Insbesondere ist $x \neq x_{i_1}, \ldots, x \neq x_{i_s}$. Dann setzen wir

$$[\exists x\varphi]\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r} := \exists u\left[\varphi\frac{t_{i_1}\ldots t_{i_s}u}{x_{i_1}\ldots x_{i_s}x}\right];$$

dabei sei u die Variable x, falls x nicht in $t_{i_1}, \ldots, t_{i_s}$ auftritt; sonst sei u die erste Variable von $v_0, v_1, v_2, \ldots$, die nicht in $\varphi, t_{i_1}, \ldots, t_{i_s}$ vorkommt.

Die Operation ist

$$t \longmapsto t\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}$$

[für Terme]

"Im Term t werden die Var. $x_0, \ldots x_r$ durch die Terme $t_0 \ldots t_r$ ersetzt"

$$\varphi \longmapsto \varphi\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}$$

[für Formeln]

Was passiert im $\exists x\varphi$-Schritt?

$$\psi := \exists x \varphi \frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}$$

Überprüfe zunächst, welches die relevanten Variablen sind:

$$\{x_0, \ldots, x_r\} \cap \text{frei}(\exists x \varphi) \cap \{x_i ; x_i \neq t_i\}$$

Bestimme u:

- Fall 1. Falls x nicht in t_i für x_i relevant auftaucht, so ist $x = u$.
- Fall 2. Sonst. Dann ist $u = v_k$, wobei k die kleinste natürliche Zahl ist, so daß v_k nicht in φ, t_i [für v_i relevant] auftaucht.

Setze

$$\psi := \exists u\, \varphi \frac{t_{i_0} \ldots t_{i_s}\ u}{x_{i_0} \ldots x_{i_s}\ x}$$

wobei x_{i_j} die relevanten Variablen sind.

Wichtige Bem. Wir sind bisher recht schlampig mit unseren Variablen umgegangen: x, y, z, u, v sind offiziell keine Variablen, aber wir haben sie stets benutzt.
Hier (in Fall 2 bei der Bestimmung von u) brauchen wir die spezifische Form der Variablen:

$$v_i \quad \text{mit } i \in \mathbb{N}.$$

Exkurs: Logische Äquivalenz

$$(\varphi \wedge \psi) \mathrel{=\!\mid\mid\!=} \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$$

$$(\varphi \to \psi) \mathrel{=\!\mid\mid\!=} (\neg\varphi \vee \psi)$$

$$(\varphi \leftrightarrow \psi) \mathrel{=\!\mid\mid\!=} ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$$

$$(\forall x \varphi) \mathrel{=\!\mid\mid\!=} \neg\exists x \neg\varphi$$

Daher können Ind. + Rek. auf die genannten Operationen $\neg, \vee, \exists$ zurückgeführt werden

(A3)	1	1
(A4)	4	1
(A5)	2	1
	7	3

Bsp. $S = S_F \cup S_R = \{f\} \cup \{P\}$

$\sigma(f) = \sigma(P) = 2$

$\varphi_1 = Pv_0 f v_1 v_2$

$\varphi_1 \frac{v_2 \; v_0 \; v_1}{v_1 \; v_2 \; v_3} = P v_0 f v_2 v_0$

$\varphi_2 = \exists v_0 P v_0 f v_1 v_2$

$\varphi_2 \frac{v_4 \; fv_1v_1}{v_0 \; v_2} = \exists v_0 \left[Pv_0 f v_1 v_2 \right] \frac{fv_1v_1 \; v_0}{v_2 \; v_0}$ „u"

1. Schritt: Was sind die relevanten Variablen?

v_0, v_2 werden substituiert

v_0 ist nicht frei in φ_2

$\Longrightarrow$ v_2 ist die einzige rel. Var.

2. Schritt: Was ist u?

Unterschritt 1. Überprüfe, ob v_0 im relevanten Term fv_1v_1 auftaucht. Tut sie nicht!

Also sind wir in Fall 1.

Somit $u = v_0$.

$= \exists v_0 P v_0 f v_1 fv_1v_1$

3. $\varphi_3 = \exists v_0 P v_0 f v_1 v_2 = \varphi_2$

$$\varphi_3 \frac{v_0 \; v_2 \; v_4}{v_1 \; v_2 \; v_0} = \exists u \left[P v_0 f v_1 v_2 \right] \ldots$$

Schritt 1. Was sind die relevanten Variablen?

v_0, v_1, v_2 werden ersetzt.

v_0 ist nicht frei in φ_3.

v_2 wird trivial ersetzt.

$\Longrightarrow$ v_1 ist die einzige relevante Variable.

Damit ist v_0 der relevante Term.

Schritt 2. Was ist u?

Die quantifizierte Variable ist v_0.

Frage Kommt sie im relevanten Term vor?

Ja, da v_0 der rel. Term ist.

Also sind wir in Fall 2, d.h. $u = v_k$ mit k minimal, so daß es nicht in $P v_0 f v_1 v_2$ und v_0 auftaucht.

Also: $u = v_3$.

$$= \exists v_3 \left[P v_0 f v_1 v_2 \right] \frac{v_0 \; v_3}{v_1 \; v_0}$$

$$= \exists v_3 \, P v_3 f v_0 v_2$$

3.8.3 Substitutionslemma (a) *Für alle Terme t:*

$$\mathfrak{I}\left(t\boxed{\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}}\right)=\boxed{\mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0)\ldots\mathfrak{I}(t_r)}{x_0\ldots x_r}}(t).$$

SYNTAX SEMANTIK

(b) *Für alle Ausdrücke φ:*

$$\longrightarrow \quad \mathfrak{I}\models\varphi\boxed{\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}} \text{ gdw } \mathfrak{I}\boxed{\frac{\mathfrak{I}(t_0)\ldots\mathfrak{I}(t_r)}{x_0\ldots x_r}}\models\varphi.$$

SYNTAX SEMANTIK.

<u>1. Bemerkung</u> Erinnerung:

$\mathfrak{I}=(\mathfrak{A},\beta)$ — $\mathfrak{A}$ Struktur, β Belegung

$\mathfrak{A}=(A,\mathfrak{a})$ — A Grundmenge, $\mathfrak{a}$ Zuordn. von Fkt. und Rel.

Falls $a\in A$ und x Variable.

$\beta\frac{a}{x}$ Belegung: wie β nur $\beta\frac{a}{x}(x):=a$.

$\mathfrak{I}\frac{a}{x}:=(\mathfrak{A},\beta\frac{a}{x})$

Falls φ eine Formel mit $\text{frei}(\varphi)=\{x_1,\ldots,x_n\}$ dann hängt $\mathfrak{I}\models\varphi$ lediglich von den Werten von β an $x_1,\ldots,x_n$ ab. [Koinzidenzlemma.]

<u>Also:</u> Falls für alle $1\leq i\leq n$ gilt

$\beta(x_i)=\beta'(x_i)$, so gilt

$$(\mathfrak{A},\beta)\models\varphi \iff (\mathfrak{A},\beta')\models\varphi.$$

D.h. auch

falls β, β' beliebig, so gilt

$$(\mathfrak{A}, \beta \tfrac{a_1 \dots a_n}{x_1 \dots x_n}) \models \varphi \iff (\mathfrak{A}, \beta' \tfrac{a_1 \dots a_n}{x_1 \dots x_n}) \models \varphi$$

Daher können wir abkürzen:

$$\mathfrak{A} \tfrac{a_1 \dots a_n}{x_1 \dots x_n} \models \varphi$$

[Das soll heißen: f.a. β $(\mathfrak{A}, \beta \tfrac{a_1 \dots a_n}{x_1 \dots x_n}) \models \varphi$.]

Man beachte auch:

$$\mathfrak{I} \tfrac{a}{x} \tfrac{b}{y} = \mathfrak{I} \tfrac{b}{y} \tfrac{a}{x} \quad \text{falls } x \neq y$$

$$\mathfrak{I} \tfrac{a}{x} \tfrac{b}{y} = \mathfrak{I} \tfrac{a}{x} \tfrac{b}{x} = \mathfrak{I} \tfrac{b}{x} \quad \text{falls } x = y$$

Insbesondere gilt: $\mathfrak{I} \tfrac{a}{x} \tfrac{a}{x} = \mathfrak{I} \tfrac{a}{x}$.

---

2. Bemerkung

Vorlesung + Übungen 9 LP

1 LP = 30 Stunden

D.h. VL + Ü = 270 Stunden.

MLML hat 25 VL à 90 min: $37\frac{1}{2}$ Stunden

13 Ü à 90 min: $19\frac{1}{2}$ Stunden

57

270 − 57 = 213 Stunden

$$\frac{213 \text{ Stunden}}{15 \text{ Wochen}} = 14{,}2 \text{ h/Woche}$$

Nachbereiten
Vorbereiten
Lesen im Buch
Hausaufg.
Präsentationsaufg.

Beweis. Wir führen den Beweis anhand der Definitionen 3.8.1 und 3.8.2 durch Induktion über den Aufbau der Terme bzw. der Ausdrücke, beschränken uns dabei allerdings auf einige typische Fälle.

$t = x$: Ist $x \neq x_0, \ldots, x \neq x_r$, so ist nach 3.8.1(a)

$$x\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} = x$$

und daher

$$\mathfrak{I}\left(x\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}\right) = \mathfrak{I}(x) = \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0) \ldots \mathfrak{I}(t_r)}{x_0 \ldots x_r}(x).$$

Ist $x = x_i$, so ist

$$x\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} = t_i$$

und daher

$$\mathfrak{I}\left(x\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}\right) = \mathfrak{I}(t_i) = \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0) \ldots \mathfrak{I}(t_r)}{x_0 \ldots x_r}(x_i) = \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0) \ldots \mathfrak{I}(t_r)}{x_0 \ldots x_r}(x).$$

$\varphi = Rt'_1 \ldots t'_n$: $\mathfrak{I} \models [Rt'_1 \ldots t'_n]\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}$

gdw $\mathfrak{I}(R)$ trifft zu auf $\mathfrak{I}\left(t'_1\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}\right), \ldots$ (nach 3.8.2(b))

gdw $\mathfrak{I}(R)$ trifft zu auf $\mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0) \ldots \mathfrak{I}(t_r)}{x_0 \ldots x_r}(t'_1), \ldots$ (nach (a))

gdw $\mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0) \ldots \mathfrak{I}(t_r)}{x_0 \ldots x_r}(R)$ trifft zu auf $\mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0) \ldots \mathfrak{I}(t_r)}{x_0 \ldots x_r}(t'_1), \ldots$

gdw $\mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0) \ldots \mathfrak{I}(t_r)}{x_0 \ldots x_r} \models Rt'_1 \ldots t'_n$.

$\varphi = \exists x\psi$: Seien wie in 3.8.2(e) $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$ gerade die Variablen x_i mit $x_i \in \mathrm{frei}(\exists x\psi)$ und $x_i \neq t_i$. Wählen wir dann u wie in 3.8.2(e), so gilt

$\mathfrak{I} \models [\exists x\psi]\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}$

gdw $\mathfrak{I} \models \exists u\left[\psi\frac{t_{i_1} \ldots t_{i_s}\, u}{x_{i_1} \ldots x_{i_s}\, x}\right]$

gdw es gibt $a \in A$: $\mathfrak{I}\frac{a}{u} \models \psi\frac{t_{i_1} \ldots t_{i_s}\, u}{x_{i_1} \ldots x_{i_s}\, x}$

gdw es gibt $a \in A$: $[\mathfrak{I}\frac{a}{u}]\frac{\mathfrak{I}\frac{a}{u}(t_{i_1}) \ldots \mathfrak{I}\frac{a}{u}(t_{i_s})\, \mathfrak{I}\frac{a}{u}(u)}{x_{i_1} \ldots x_{i_s}\, x} \models \psi$
(nach Induktionsvoraussetzung)

gdw es gibt $a \in A$: $[\mathfrak{I}\frac{a}{u}]\frac{\mathfrak{I}(t_{i_1}) \ldots \mathfrak{I}(t_{i_s})\, a}{x_{i_1} \ldots x_{i_s}\, x} \models \psi$ (nach dem Koinzidenzlemma, da u nicht in $t_{i_1}, \ldots, t_{i_s}$ vorkommt)

gdw es gibt $a \in A$: $\mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_{i_1}) \ldots \mathfrak{I}(t_{i_s})\, a}{x_{i_1} \ldots x_{i_s}\, x} \models \psi$ (da $u = x$ oder u nicht in ψ vorkommt (Koinzidenzlemma!))

gdw es gibt $a \in A$: $\left[\mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_{i_1}) \ldots \mathfrak{I}(t_{i_s})}{x_{i_1} \ldots x_{i_s}}\right]\frac{a}{x} \models \psi$
(beachte, dass $x \neq x_{i_1}, \ldots, x \neq x_{i_s}$)

gdw $\mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_{i_1}) \ldots \mathfrak{I}(t_{i_s})}{x_{i_1} \ldots x_{i_s}} \models \exists x\psi$

gdw $\mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0) \ldots \mathfrak{I}(t_r)}{x_0 \ldots x_r} \models \exists x\psi$ (denn für $i \neq i_1, \ldots, i \neq i_s$ ist $x_i \notin \mathrm{frei}(\exists x\psi)$ oder $x_i = t_i$). ⊣

In den folgenden Lemmata sammeln wir einige syntaktische Eigenschaften der Substitution.

3.8.4 Lemma (a) *Für jede Permutation π der Zahlen $0, \ldots, r$ gilt:*
$\varphi\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} = \varphi\frac{t_{\pi(0)} \ldots t_{\pi(r)}}{x_{\pi(0)} \ldots x_{\pi(r)}}$.

(b) *Ist $0 \leq i \leq r$ und $x_i = t_i$, so ist*
$\varphi\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} = \varphi\frac{t_0 \ldots t_{i-1}\, t_{i+1} \ldots t_r}{x_0 \ldots x_{i-1}\, x_{i+1} \ldots x_r}$.
Insbesondere ist $\varphi\frac{x}{x} = \varphi$.

(c) *Für alle Variablen y gilt:*

(i) *Wenn $y \in \mathrm{var}\left(t\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}\right)$, so $y \in \mathrm{var}(t_0) \cup \ldots \cup \mathrm{var}(t_r)$ oder $(y \in \mathrm{var}(t)$ und $y \neq x_0, \ldots, y \neq x_r)$.*

(ii) *Wenn $y \in \mathrm{frei}\left(\varphi\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}\right)$, so $y \in \mathrm{var}(t_0) \cup \ldots \cup \mathrm{var}(t_r)$ oder $(y \in \mathrm{frei}(\varphi)$ und $y \neq x_0, \ldots, y \neq x_r)$.*

Beweis. Wir schließen induktiv anhand von 3.8.1 und 3.8.2. Dabei beschränken wir uns auf zwei typische Fälle von (c).

$t = x$: Ist $x \neq x_0, \ldots, x \neq x_r$, so $x\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} = x$. Ist nun $y \in \mathrm{var}\left(x\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}\right)$, so ist $y = x$ und daher $(y \in \mathrm{var}(x)$ und $y \neq x_0, \ldots, y \neq x_r)$. – Ist $x = x_i$, so ist $x\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} = t_i$. Wenn dann $y \in \mathrm{var}\left(x\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}\right)$, so auch $y \in \mathrm{var}(t_i)$, also $y \in \mathrm{var}(t_0) \cup \ldots \cup \mathrm{var}(t_r)$.

$\varphi = \exists x\psi$: Seien $s, i_1, \ldots, i_s$ und u wie in Definition 3.8.2(e) und sei

$$y \in \mathrm{frei}\left([\exists x\psi]\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}\right) = \mathrm{frei}\left(\exists u\left[\psi\frac{t_{i_1} \ldots t_{i_s}\, u}{x_{i_1} \ldots x_{i_s}\, x}\right]\right).$$

Es ist dann $y \neq u$ und

Der (fast) volle Beweis des Substitutionslemmas findet sich in EFT S. 57–58.
Wir wollen den [einzigen] schwierigen Fall der Induktion nach dem Formelaufbau

$$\psi \rightsquigarrow \exists x\psi$$

betrachten.
Also: nehmen an, daß ψ das Subst.-lemma bereits erfüllt und zeigen, daß $\exists x\psi$ das Subst.-lemma erfüllt.

Beweis (IV)

$$\mathfrak{I} \models \psi \frac{t_0 \dots t_n}{x_0 \dots x_n} \iff \mathfrak{I} \frac{\mathfrak{I}(t_0) \dots \mathfrak{I}(t_n)}{x_0 \dots x_n} \models \psi$$

z.z.

$$\mathfrak{I} \models [\exists x \psi] \frac{t_0 \dots t_n}{x_0 \dots x_n} \iff \boxed{\mathfrak{I} \frac{\mathfrak{I}(t_0) \dots \mathfrak{I}(t_n)}{x_0 \dots x_n} \models \exists x \psi}$$

$$\mathfrak{I} \models [\exists x \psi] \frac{t_0 \dots t_n}{x_0 \dots x_n} \iff \mathfrak{I} \models \exists u \, \psi \frac{t_{i_0} \dots t_{i_s}}{x_{i_0} \dots x_{i_s}} \frac{u}{x}$$

wobei die x_{i_j} relevant sind und u wie in der Def. best. wird

$$\iff \text{es ex. } a \in A \quad \mathfrak{I} \frac{a}{u} \models \psi \frac{t_{i_0} \dots t_{i_s} \, u}{x_{i_0} \dots x_{i_s} \, x}$$

$$\iff \text{es ex. } a \in A$$

$$\mathfrak{I} \frac{a}{u} \frac{\mathfrak{I}\frac{a}{u}(t_{i_0}) \dots \mathfrak{I}\frac{a}{u}(t_{i_s}) \; \overset{= a}{\mathfrak{I}\frac{a}{u}(u)}}{x_{i_0} \dots x_{i_s} \; x} \models \psi$$

$$\iff \text{es ex. } a \in A$$

$$\mathfrak{I} \frac{a}{u} \frac{\mathfrak{I}\frac{a}{u}(t_{i_0}) \dots \mathfrak{I}\frac{a}{u}(t_{i_s}) \; a}{x_{i_0} \dots x_{i_s} \; x} \models \psi$$

u war so gewählt, daß u nicht in den t_{i_j} vorkommt.

KOINZIDENZ-LEMMA

$$\iff \text{es ex. } a \in A$$

$$\mathfrak{I} \frac{a}{u} \frac{\mathfrak{I}(t_{i_0}) \dots \mathfrak{I}(t_{i_s}) \; a}{x_{i_0} \dots x_{i_s} \; x} \models \psi$$

$\iff$ nach Vorüberlegungen zum Austausch der Reihenfolge

es ex. $a \in A$

$$\mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_{i_0}) \ldots \mathfrak{I}(t_{i_s})\; a\; a}{x_{i_0} \quad \ldots \quad x_{i_s}\; v\; x} \models \psi .$$

Entweder ist $v = x$, dann ist $\frac{a}{v}\frac{a}{x} = \frac{a}{x}$ oder v taucht nicht in ψ auf und somit ist $\frac{a}{v}$ nach Koinzidenzlemma irrelevant.

$\iff$ es ex. $a \in A$

$$\mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_{i_0}) \ldots \mathfrak{I}(t_{i_s})\; a}{x_{i_0} \ldots x_{i_s}\; x} \models \psi$$

$$\overset{\text{Def.}}{\iff} \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_{i_0}) \ldots \mathfrak{I}(t_{i_s})}{x_{i_0} \ldots x_{i_s}} \models \exists x \psi .$$

$\iff$ nach Koinzidenzlemma

$$\mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0) \ldots \mathfrak{I}(t_n)}{x_0 \ldots x_n} \models \exists x \psi$$

[die irrelevanten x_j sind nicht frei in $\exists x \psi$, somit spielt ihre Belegung keine Rolle.]

q.e.d.