MLML V

Sommersemester 2021
22. April 2021

3.3.2 Definition der Modellbeziehung Für alle $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ setzen wir:

$\mathfrak{I} \models t_1 \equiv t_2$	:gdw[1]	$\mathfrak{I}(t_1) = \mathfrak{I}(t_2)$
$\mathfrak{I} \models Rt_1 \ldots t_n$	:gdw	$R^{\mathfrak{A}}\mathfrak{I}(t_1)\ldots\mathfrak{I}(t_n)$ (d.h., $R^{\mathfrak{A}}$ trifft zu auf $\mathfrak{I}(t_1), \ldots, \mathfrak{I}(t_n)$)
$\mathfrak{I} \models \neg\varphi$	:gdw	nicht $\mathfrak{I} \models \varphi$
$\mathfrak{I} \models (\varphi \wedge \psi)$	:gdw	$\mathfrak{I} \models \varphi$ und $\mathfrak{I} \models \psi$
$\mathfrak{I} \models (\varphi \vee \psi)$	:gdw	$\mathfrak{I} \models \varphi$ oder $\mathfrak{I} \models \psi$
$\mathfrak{I} \models (\varphi \rightarrow \psi)$	:gdw	wenn $\mathfrak{I} \models \varphi$, so $\mathfrak{I} \models \psi$
$\mathfrak{I} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$	:gdw	$\mathfrak{I} \models \varphi$ genau dann, wenn $\mathfrak{I} \models \psi$
$\mathfrak{I} \models \forall x\varphi$	:gdw	für alle $a \in A$ gilt $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$
$\mathfrak{I} \models \exists x\varphi$	:gdw	es gibt ein $a \in A$ mit $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$.

BEISPIEL

$S_F = \{\oplus\}$ $S_R = \{\sqsubset\}$
$S_K = \{\mathbb{O}\}$

Grundmenge $\mathbb{Z} = A$

$\mathfrak{a}(\oplus) := +$
$\mathfrak{a}(\sqsubset) := \leq$
$\mathfrak{a}(\mathbb{O}) := 0$

$\mathfrak{A} = (\mathbb{Z}, \mathfrak{a})$

Bsp ① $\forall x \exists y \sqsubset xy$

Nachgerechnet:
Für alle β gilt: $(\mathfrak{A}, \beta) \models \forall x \exists y \sqsubset xy$

Bsp. 2 $\exists x \exists y (\sqsubset xy \wedge \forall z \neg(\sqsubset xz \wedge \sqsubset zy))$

"Diskretheitsbedingung".
Intuitives Ziel: $\mathbb{Z}$ erfüllt diese Formel.

FORMELABLEITUNG

- ✓ $\alpha = \sqsubset xy$ (A2)
- ✓ $\beta = \sqsubset xz$ (A2)
- ✓ $\gamma = \sqsubset zy$ (A2)
- ✓ $\delta = (\sqsubset xz \wedge \sqsubset zy)$ (A4 $\wedge$) aus β, γ
- ✓ $\varepsilon = \neg(\sqsubset xz \wedge \sqsubset zy)$ (A3) aus δ
- ✓ $\zeta = \forall z \neg(\sqsubset xz \wedge \sqsubset zy)$ (A6 $\forall$) aus ε mit Var. z
- ✓ $\eta = (\sqsubset xy \wedge \forall z \neg(\sqsubset xz \wedge \sqsubset zy))$ (A4 $\wedge$) aus α und ζ

ϑ $\exists y(\sqsubset xy \wedge \forall z \neg(\sqsubset xz \wedge \sqsubset zy))$ (A6 $\exists$)

ι $\exists x \exists y(\sqsubset xy \wedge \forall z \neg(\sqsubset xz \wedge \sqsubset zy))$ (A6 $\exists$)

Nächster Schritt: $\mathfrak{A} = (\mathbb{Z}, <)$

Charakterisiere die β, so daß $(\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi$
für jeden Schritt der Formelableitung.

α $\sqsubset xy$ $(\mathfrak{A},\beta) \models \sqsubset xy \iff \beta(x) < \beta(y)$ (*)

β $(\mathfrak{A},\beta) \models \sqsubset xz \iff \beta(x) < \beta(z)$

γ $(\mathfrak{A},\beta) \models \sqsubset zy \iff \beta(z) < \beta(y)$

δ $(\mathfrak{A},\beta) \models \delta \iff \beta(x) < \beta(z) < \beta(y)$

ε $(\mathfrak{A},\beta) \models \varepsilon \iff \beta(x) \geq \beta(z)$ oder $\beta(z) \geq \beta(y)$

ζ $(\mathfrak{A},\beta) \models \forall z \varepsilon \iff$ für alle $a \in \mathbb{Z}$ $(\mathfrak{A}, \beta\frac{a}{z}) \models \varepsilon$

$\iff$ für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt $\beta\frac{a}{z}(x) \geq \beta\frac{a}{z}(z)$ oder $\beta\frac{a}{z}(z) \geq \beta\frac{a}{z}(y)$

$\iff$ für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt $\beta\frac{a}{z}(x) \geq a$ oder $a \geq \beta\frac{a}{z}(y)$.

η $(\mathfrak{A},\beta) \models \eta \iff$ für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt $\beta(x) < \beta(y)$ und $[\beta\frac{a}{z}(x) \geq a$ oder $a \geq \beta\frac{a}{z}(y)]$

ι $(\mathfrak{A},\beta) \models \exists x \exists y \eta \iff$ es gibt $b, c \in \mathbb{Z}$ so daß f.a. $a \in \mathbb{Z}$ gilt $b < c$ und $[b \geq a$ oder $a \geq c]$

Zusammenfassend:

Unabhängig von β gilt

$(\mathfrak{A}, \beta) \models \iota \iff$ es ex. $b, c \in \mathbb{Z}$
s.d. f.a. $a \in \mathbb{Z}$ gilt:
$b < c$ und $[b \geq a$ oder $a \leq c]$.

Wähle $b = 0$, $c = 1$.
Dann gilt $0 < 1$.
und alle $a \in \mathbb{Z}$ sind entweder
≥ 0 oder ≤ 1.

Damit gilt die rechte Seite und haben bewiesen, daß
$(\mathfrak{A}, \beta) \models \iota$ für beliebige β.

Bsp. 2 ist ein Satz und wir erwarten, daß seine Gültigkeit <u>nicht</u> von der ~~B~~Belegung abhängt.
Das ist genau das, was unsere Rechnung zeigt.

3.4.6 Koinzidenzlemma *Es sei $\mathfrak{I}_1 = (\mathfrak{A}_1, \beta_1)$ eine S_1-Interpretation und $\mathfrak{I}_2 = (\mathfrak{A}_2, \beta_2)$ eine S_2-Interpretation, beide über demselben Träger $A_1 = A_2$. Ferner sei $S := S_1 \cap S_2$.*

(a) *Sei t ein S-Term. Wenn $\mathfrak{I}_1$ und $\mathfrak{I}_2$ für die in t auftretenden Symbole aus S und die in t auftretenden Variablen übereinstimmen*[3], *so ist $\mathfrak{I}_1(t) = \mathfrak{I}_2(t)$.*

(b) *Sei φ ein S-Ausdruck. Wenn $\mathfrak{I}_1$ und $\mathfrak{I}_2$ für die in φ auftretenden Symbole aus S und die in φ frei auftretenden Variablen übereinstimmen, so gilt: $\mathfrak{I}_1 \models \varphi$ gdw $\mathfrak{I}_2 \models \varphi$.* (*)

Beweis von (a). INDUKTION NACH DEM TERMAUFBAU.

[Übungsblatt #3]

Beweis von (b). Induktion nach dem Formelaufbau.

[Übungsblatt #3.]

Wir betrachten den Fall $\varphi = \exists x \psi$.

Im Induktionsbeweis nehmen wir an, daß ψ (*) erfüllt und zeigen, daß φ (*) erfüllt.

(*) für ψ: Wenn $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2$ für die in ψ auftr. Symbole aus S und die in ψ frei auftr. Var. übereinstimmen, so gilt $\mathfrak{I}_1 \models \psi \Leftrightarrow \mathfrak{I}_2 \models \psi$.

Z.Z. Ang. $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2$ stimmen für die in φ auftr. Symbole aus S und die in φ frei auftretenden Var. übereinst.

Bem 1 Ein Symbol aus S tritt in ψ auf gdw es in φ auftritt.

$\text{frei}(\varphi) = \text{frei}(\psi) \setminus \{x\}$ per Def von frei

$\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ stimmen auf frei(φ) überein.

Wir brauchen Interpretationen, die auf frei(ψ) $\supseteq$ frei(φ) übereinstimmen, damit wir ($*$) anwenden können.

Das ist z.B. der Fall, falls $a \in A_1 = A_2$ und die Int. sind

$$\mathcal{I}_1\frac{a}{x} \text{ und } \mathcal{I}_2\frac{a}{x}.$$

Es gilt: $\mathcal{I}_1\frac{a}{x}, \mathcal{I}_2\frac{a}{x}$ stimmen auf frei(ψ) überein.

Somit können wir ($*$) anwenden.

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 \models \varphi &\iff \mathcal{I}_1 \models \exists x \psi \\
&\iff \text{es ex. } a \in A_1 \ \underline{\mathcal{I}_1\tfrac{a}{x} \models \psi} \\
&\qquad\qquad [\text{nach IV}] \\
&\iff \text{es ex. } a \in \underset{\substack{\| \\ A_2}}{A_1} \ \mathcal{I}_2\tfrac{a}{x} \models \psi \\
&\iff \mathcal{I}_2 \models \exists x \psi \\
&\iff \mathcal{I}_2 \models \varphi.
\end{aligned}$$

KOROLLAR

① Falls $S_1 \subseteq S_2$ und $\mathfrak{A}_2 = (A, a_2)$ und $\mathfrak{A}_1 = (A, a_1)$ mit a_1 und a_2 stimmen auf S_1 überein, so nennen wir $\mathfrak{A}_1$ das S_1-REDUKT von $\mathfrak{A}_2$ und es gilt, falls $\varphi \in L^{S_1}$:

$$(\mathfrak{A}_1, \beta) \models \varphi \iff (\mathfrak{A}_2, \beta) \models \varphi.$$

② Falls φ ein Satz ist, so gilt für je zwei Bel. β, β':

$$(\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi \iff (\mathfrak{A}, \beta') \models \varphi.$$

Wir schreiben also, falls φ ein Satz ist

$$\mathfrak{A} \models \varphi$$

für "für alle β, $(\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi$".

Weitere Notation.

Falls Φ eine Menge von Ausdrücken ist, so schreiben wir

$$\mathfrak{I} \models \Phi \quad \text{gdw f.a. } \varphi \in \Phi \;\; \mathfrak{I} \models \varphi.$$

[Bsp. A, N, I waren die Axiome der Gruppentheorie in G2.
Falls $\Phi = \{A, N, I\}$, so können wir
$(\mathbb{Q}, +, 0) \models \Phi$ statt
$(\mathbb{Q}, +, 0, \beta) \models ((A \wedge N) \wedge I)$]

Ebenso, falls Φ eine Menge von Sätzen:

$$\mathfrak{A} \models \Phi.$$

FOLGERUNGSBEZIEHUNG:

$\Phi \models \varphi$ gdw alle Interpr. $\mathfrak{I}$, so daß $\mathfrak{I} \models \Phi$, haben daß $\mathfrak{I} \models \varphi$.

Bsp. Falls $\Phi = \{A, N, I\}$, so gilt

$$\Phi \models \varphi \iff \varphi \text{ gilt in allen Gruppen}$$

Spezialfall: Falls $\Phi = \emptyset$

Falls $\Phi = \emptyset$, so haben wir

$$\emptyset \models \varphi \iff \text{für alle } \mathcal{I},\ \mathcal{I} \models \varphi.$$

In diesem Fall heißt φ ALLGEMEINGÜLTIG oder TAUTOLOGIE.

Falls $\Phi = \{\varphi\}$, so schreiben wir

$$\varphi \models \psi \quad \text{für} \quad \{\varphi\} \models \psi.$$

und dann

$$\varphi \mathrel{=\!\!|\!\models} \psi \quad :\iff \varphi \models \psi \text{ und } \psi \models \varphi$$

In dem Falle heißen φ und ψ LOGISCH ÄQUIVALENT.

Eine Menge von Formeln Φ heißt <u>erfüllbar</u> (in Symbolen $\mathrm{Erf}\,\Phi$) falls es eine Interpretation $\mathcal{I}$ gibt mit $\mathcal{I} \models \Phi$.

Lemma (3.4.4 EFT)

$$\Phi \models \varphi \iff \text{nicht Erf } \Phi \cup \{\neg\varphi\}$$

Beweis

$\Phi \models \varphi \iff$ f.a. $\mathfrak{I}$, falls $\mathfrak{I} \models \Phi$, so $\mathfrak{I} \models \varphi$

$\iff$ f.a. $\mathfrak{I}$, nicht [$\mathfrak{I} \models \Phi$ und $\mathfrak{I} \not\models \varphi$]

$\iff$ f.a. $\mathfrak{I}$, nicht [$\mathfrak{I} \models \Phi$ und $\mathfrak{I} \models \neg\varphi$]

$\iff$ f.a. $\mathfrak{I}$, nicht $\mathfrak{I} \models \Phi \cup \{\neg\varphi\}$

$\iff$ nicht Erf $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$

q.e.d.

[Erf $\Phi \iff$ es ex. $\mathfrak{I}$ ($\mathfrak{I} \models \Phi$)]

[Seite 7–9 sind im wesentlichen Vokabular der Logik.]

SUBSTRUKTOREN & ISOMORPHISMEN.

3.5.1 Definition $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien S-Strukturen.

(a) Eine Abbildung $\pi\colon A \to B$ heißt ein *Isomorphismus von* $\mathfrak{A}$ *auf* $\mathfrak{B}$ (kurz: $\pi\colon \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$) :gdw

(1) π ist eine Bijektion von A auf B.

(2) Für n-stelliges $R \in S$ und $a_1, \dots, a_n \in A$:
$$R^{\mathfrak{A}} a_1 \dots a_n \quad \text{gdw} \quad R^{\mathfrak{B}} \pi(a_1) \dots \pi(a_n).$$

(3) Für n-stelliges $f \in S$ und $a_1, \dots, a_n \in A$:
$$\pi(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)).$$

(4) Für $c \in S$ ist $\pi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.

(b) $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen *isomorph* (kurz: $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$) genau dann, wenn es einen Isomorphismus $\pi\colon \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ gibt.

(c) Eine Abb. $\pi: A \longrightarrow B$ heißt Einbettung falls sie injektiv ist und (2), (3), (4) erfüllt.

$\pi: \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ [Nicht ganz korrekt, da $A \not\subseteq B$. Aber wir können A als TM von B auffassen durch $\pi[A] \subseteq B$.]

Man beachte dass $\mathfrak{A} \cong (\pi[A], \mathfrak{A})$.

3.5.4 Definition Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ S-Strukturen. Dann heißt $\mathfrak{A}$ *Substruktur von* $\mathfrak{B}$ (kurz: $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$), wenn

(a) $A \subseteq B$;

(b) (1) für n-stelliges $R \in S$ ist $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}} \cap A^n$
(d.h., für alle $a_1, \dots, a_n \in A$ gilt: $R^{\mathfrak{A}} a_1 \dots a_n$ gdw $R^{\mathfrak{B}} a_1 \dots a_n$);

(2) für n-stelliges $f \in S$ ist $f^{\mathfrak{A}}$ die Restriktion von $f^{\mathfrak{B}}$ auf A^n;

(3) für $c \in S$ ist $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$.

D 3.5.4 ist einfach der Spezialfall von Def. (c) oben, falls π die Identität ist.

Insbesondere, falls $\pi: \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, so ist
$$(\pi[A], \mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{B}.$$

Falls β eine Belegung in A ist und $\pi: A \longrightarrow \mathfrak{B}$, so schreiben wir
$$\beta^{\pi} := \pi \circ \beta$$
Dann ist β^{π} eine Belegung in $\mathfrak{B}$.

$\pi(a+b) = \pi(a) + \pi(b)$

<u>Lemma 1</u> Sei $\pi : A \longrightarrow B$ eine Einbettung von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$. Sei β eine Belegung in A. Schreibe

$$\mathfrak{I} := (\mathfrak{A}, \beta)$$
$$\mathfrak{I}^{\pi} := (\mathfrak{B}, \beta^{\pi}).$$ Dann gilt:

(a) $\pi(\mathfrak{I}(t)) = \mathfrak{I}^{\pi}(t)$

(b) Sei φ ein Ausdruck, in dem keine Quantoren vorkommen [quantorenfreier Ausdruck]. Dann gilt

$$\mathfrak{I} \models \varphi \iff \mathfrak{I}^{\pi} \models \varphi.$$

[Man beachte: Nach dem Koinzidenzlemma: falls φ ein quantorenfreier Satz ist, so gilt $\mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{B} \models \varphi$.]

<u>Beweis</u> (a) per Ind. nach dem Termaufbau.

<u>(T1)</u> z.z. (a) gilt für alle Variablen

$t = x$ Variable

$$\begin{aligned}
\pi(\mathfrak{I}(t)) = \pi(\mathfrak{I}(x)) &= \pi((\mathfrak{A}, \beta)(x)) \\
&= \pi(\beta(x)) \\
&= (\pi \circ \beta)(x) = \beta^{\pi}(x) \\
&= \mathfrak{I}^{\pi}(x)
\end{aligned}$$

$\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$

$\mathcal{I}^\pi = (\mathfrak{B}, \beta^\pi)$

(T2)
$$\pi(\mathcal{I}(c)) = \pi(\mathfrak{A}(c)) = \pi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}} = \mathcal{I}^\pi(c).$$

(T3)
$$\begin{aligned}\pi(\mathcal{I}(f t_1 \dots t_n)) &= \pi\left(f^{\mathfrak{A}}(\mathcal{I}(t_1), \dots, \mathcal{I}(t_n))\right) \\ &= f^{\mathfrak{B}}\left(\pi(\mathcal{I}(t_1)), \dots, \pi(\mathcal{I}(t_n))\right) \\ &\overset{IV}{=} f^{\mathfrak{B}}\left(\mathcal{I}^\pi(t_1), \dots, \mathcal{I}^\pi(t_n)\right) \\ &= \mathcal{I}^\pi(f t_1 \dots t_n).\end{aligned}$$

q.e.d. (a)

(b) wird per Induktion über den Termaufbau bewiesen. Allerdings, da wir die Beh. nur für quantorenfreie Ausdrücke formuliert haben, mussten wir Bed. (AS) nicht überprüfen.

Bem. (AS) wird hier nicht gelten; wir sehen später den Beweis von (AS) im Isomorphielemma, wo die Surjektivität wesentlich ist!

Also verbleiben (A1), (A2), (A3), (A4):

(A3) und (A4) sind gänzlich trivial (folgt direkt aus Definition $\models$).

(A2) ist Bedingung (2) aus dem Begriff der Einbettung.

(A1) folgt direkt aus unserem Schritt (a).