Lösungsvorschlag zu Präsentationsaufgabe P1

Definition. Sei S eine Symbolmenge. S-P-Ausdrücke sind genau diejenigen Zeichenreihen in $\mathbb{A}_S^*$, welche man durch endlichmalige Anwendung der folgenden Regeln erhalten kann:

(A1) Für S-Terme t_1, t_2 ist $t_1 \equiv t_2$ ein S-P-Ausdruck.

(A2) Sind $t_1, \dots, t_n$ S-Terme und R ein n-stelliges Relationssymbol aus S, so ist $Rt_1 \dots t_n$ ein S-P-Ausdruck.

(A3) Ist φ ein S-P-Ausdruck, so ist $\neg\varphi$ ein S-P-Ausdruck.

(A4)' Sind φ und ψ S-P-Ausdrücke, so sind auch $\wedge\varphi\psi$, $\vee\varphi\psi$, $\rightarrow\varphi\psi$ und $\leftrightarrow\varphi\psi$ S-P-Ausdrücke.

(A5) Ist φ ein S-P-Ausdruck und x eine Variable, so sind $\forall x\varphi$ und $\exists x\varphi$ S-P-Ausdrücke.

Die Menge der S-P-Ausdrücke bezeichnen wir mit L_P^S.

Satz (Induktion über den S-P-Ausdrucksaufbau)**.** Sei S eine Symbolmenge und E eine Eigenschaft von Zeichenketten, sodass

(A1)′ Jeder S-P-Ausdruck der Gestalt $t_1 \equiv t_2$ hat die Eigenschaft E.

(A2)′ Jeder S-P-Ausdruck der Gestalt $Rt_1, \dots, t_n$ hat die Eigenschaft E.

(A3)′ Hat der S-P-Ausdruck φ die Eigenschaft E, so hat auch $\neg\varphi$ die Eigenschaft E.

(A4)'′ Haben die S-P-Ausdrücke φ und ψ die Eigenschaft E, so haben auch $\wedge\varphi\psi$, $\vee\varphi\psi$, $\rightarrow\varphi\psi$ und $\leftrightarrow\varphi\psi$ die Eigenschaft E.

(A5)′ Hat der S-P-Ausdruck φ die Eigenschaft E und ist x eine Variable, so haben auch $\forall x\varphi$ und $\exists x\varphi$ die Eigenschaft E.

Dann hat jeder S-P-Ausdruck die Eigenschaft E.

Beweis. Analog zu dem Beweis der Induktion über den Termaufbau. □

Definition. Eine Menge Λ von Zeichenketten habe die *Präfixeigenschaft*, falls für $\zeta, \zeta' \in \Lambda$ gilt, dass weder ζ ein echtes Anfangsstück von ζ' noch umgekehrt ist.

Bemerkung. 2.4.2 zeigt, dass T^S und L^S die Präfixeigenschaft haben.

Satz. L_P^S hat die Präfixeigenschaft.

Beweis. Sei E die Eigenschaft, welche für eine Zeichenkette η genau dann gilt, wenn für alle S-P-Ausdrücke ψ gilt, η ist kein echtes Anfangsstück von ψ und ψ ist kein echtes Anfangsstück von η. Wir zeigen durch Induktion über den S-P-Ausdrucksaufbau, dass alle S-P-Ausdrücke φ die Eigenschaft E haben.

$\varphi = t_1 \equiv t_2$: Sei ψ ein beliebiger S-P-Ausdruck. Angenommen φ ist ein Anfangsstück von ψ. Dann gibt es eine Zeichenkette ζ mit

$$t_1 \equiv t_2\zeta = \varphi\zeta = \psi.$$

Kein S-Term kann mit einem der Symbole $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ oder einem Relationssymbol beginnen. Also muss ψ auch von der Gestalt $\psi = t_3 \equiv t_4$ sein und so gilt

$$t_1 \equiv t_2\zeta = t_3 \equiv t_4.$$

Da T^S die Präfixeigenschaft hat, kann t_1 kein echtes Anfangsstück von T_3 sein oder umgekehrt. Also muss $t_1 = t_3$ gelten und so gilt

$$\equiv t_2\zeta =\equiv t_4.$$

Durch Streichen von $\equiv$ auf beiden Seiten erhalten wir

$$t_2\zeta = t_4.$$

Aus der Präfixeigenschaft von T^S folgt jetzt, dass auch $t_2 = t_4$ gilt. Somit gilt $\zeta = \Box$ und so ist φ kein echtes Anfangsstück von ψ. Analog ist auch ψ kein echtes Anfangsstück von φ.

$\varphi = Rt_1 \dots t_n$: Sei ψ ein beliebiger S-P-Ausdruck. Angenommen φ ist ein Anfangsstück von ψ. Dann gibt es eine Zeichenkette ζ mit

$$Rt_1 \dots t_n\zeta = \varphi\zeta = \psi.$$

Dann muss ψ auch mit R beginnen und hat somit die Gestalt $\psi = Rt'_1 \dots t'_n$. Also gilt

$$Rt_1 \dots t_n\zeta = Rt'_1 \dots t'_n.$$

Durch Streichen von R auf beiden Seiten erhalten wir

$$t_1 \dots t_n\zeta = t'_1 \dots t'_n.$$

Mit der gleichen Argumentation wie in dem Beweis von 2.4.2 (a) für Funktionssymbole erhalten wir $\zeta = \Box$. Somit ist φ kein echtes Anfangsstück von ψ. Analog ist auch ψ kein echtes Anfangsstück von φ.

$\varphi = \neg\varphi'$: Sei ψ ein beliebiger S-P-Ausdruck. Angenommen φ ist ein Anfangsstück von ψ. Dann gibt es eine Zeichenkette ζ mit

$$\neg\varphi\zeta = \varphi\zeta = \psi.$$

Dann muss ψ auch mit $\neg$ beginnen und hat somit die Gestalt $\psi = \neg\psi'$. Also gilt

$$\neg\varphi'\zeta = \neg\psi'.$$

Durch Streichen von $\neg$ auf beiden Seiten erhalten wir

$$\varphi'\zeta = \psi'.$$

Nach Induktionsvoraussetzung kann φ' kein echtes Anfangsstück von ψ' sein oder umgekehrt. Somit gilt $\varphi' = \psi'$ und so $\zeta = \Box$. Also ist ist φ kein echtes Anfangsstück von ψ. Analog ist auch ψ kein echtes Anfangsstück von φ.

$\varphi = *\varphi_1\varphi_2$, wobei $* \in \{\wedge, \vee, \leftarrow, \leftrightarrow\}$: Sei ψ ein beliebiger S-P-Ausdruck. Angenommen φ ist ein Anfangsstück von ψ. Dann gibt es eine Zeichenkette ζ mit

$$*\varphi_1\varphi_2\zeta = \varphi\zeta = \psi.$$

Dann muss ψ auch mit $*$ beginnen und hat somit die Gestalt $\psi = *\psi_1\psi_2$. Also gilt

$$*\varphi_1\varphi_2\zeta = *\psi_1\psi_2.$$

Durch Streichen von $*$ auf beiden Seiten erhalten wir

$$\varphi_1\varphi_2\zeta = \psi_1\psi_2.$$

Nach Induktionsvoraussetzung kann φ_1 kein echtes Anfangsstück von ψ_1 sein oder umgekehrt. Also gilt $\varphi_1 = \psi_1$ und so gilt

$$\varphi_2\zeta = \psi_2.$$

Durch erneutes Anwenden der Induktionsvoraussetzung erhalten wir $\varphi_2 = \psi_2$ und so $\zeta = \square$. Also ist φ kein echtes Anfangsstück von ψ. Analog ist auch ψ kein echtes Anfangsstück von φ.

$\varphi = Qx\varphi'$, wobei $Q \in \{\forall, \exists\}$: Sei ψ ein beliebiger S-P-Ausdruck. Angenommen φ ist ein Anfangsstück von ψ. Dann gibt es eine Zeichenkette ζ mit

$$Qx\varphi'\zeta = \varphi\zeta = \psi.$$

Dann muss ψ auch mit Q beginnen und hat somit die Gestalt $\psi = Qy\psi_1\psi_2$, wobei y eine Variable ist. Also gilt

$$Qx\varphi'\zeta = Qy\psi'.$$

Durch Streichen von Q auf beiden Seiten erhalten wir

$$x\varphi'\zeta = y\psi'.$$

Somit gilt $x = y$ und durch Streichen von x auf beiden Seiten erhalten wir

$$\varphi'\zeta = \psi'.$$

Nach Induktionsvoraussetzung kann φ' kein echtes Anfangsstück von ψ' sein oder umgekehrt. Also gilt $\zeta = \square$ und so ist φ kein echtes Anfangsstück von ψ. Analog ist auch ψ kein echtes Anfangsstück von φ. $\square$

Satz. Sei Λ eine Menge von Zeichenketten mit der Präfixeigenschaft und seien $\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \zeta_1', \ldots, \zeta_m'$ Zeichenketten in Λ. Falls $\zeta_1 \ldots \zeta_n = \zeta_1' \ldots \zeta_m'$, so gilt $n = m$ und $\zeta_i = \zeta_i'$ für alle $i \leq n$.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung per Induktion nach n.

$n = 1$: Dann gilt $\zeta_1 = \zeta_1' \ldots \zeta_m$. Da Λ die Präfixeigenschaft hat, kann ζ_1 kein echtes Anfangsstück von ζ_1' sein oder umgekehrt. Somit gilt $\zeta_1 = \zeta_1'$. Angenommen $m > 1$. Durch Streichen von ζ_1 auf beiden Seiten erhalten wir

$$\square = \zeta_2' \ldots \zeta_m'.$$

Also $\zeta_2' = \square$. Aber das kann nicht sein und so gilt $m = 1$.

Angenommen die Behauptung gelte für n und $\zeta_1 \ldots \zeta_{n+1} = \zeta_1' \ldots \zeta_m'$. Da Λ die Präfixeigenschaft hat, kann ζ_1 kein echtes Anfangsstück von ζ_1' sein oder umgekehrt. Somit gilt $\zeta_1 = \zeta_1'$. Durch Streichen von ζ_1 auf beiden Seiten erhalten wir

$$\zeta_2 \ldots \zeta_{n+1} = \zeta_2' \ldots \zeta_m'.$$

Mit Hilfe einer Indexverschiebung können wir nun die Induktionsvoraussetzung anwenden und erhalten so $n + 1 = m$ und $\zeta_i = \zeta_i'$ für alle $i \leq n + 1$. $\square$