MLML IX

6. MAI 2021

SOMMER-SEMESTER 2021

AXIOME

Ext $\forall x \forall y \, (x = y \leftrightarrow \forall z \, (z \in x \leftrightarrow z \in y))$

Leer $\exists y \, \forall z \, \neg z \in y$

Paar

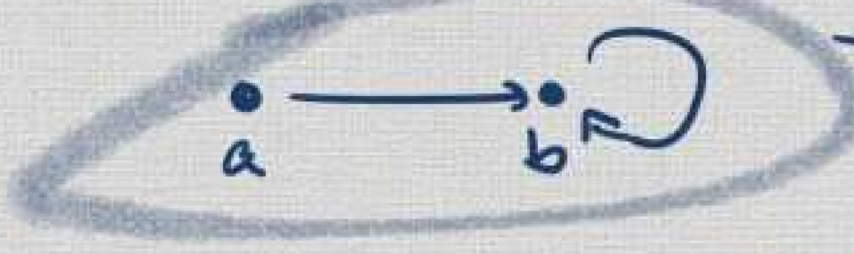
schwach $\forall x \forall y \, \exists p \, (x \in p \wedge y \in p)$

stark $\forall x \forall y \, \exists p \, \forall z \, (z \in p \leftrightarrow (z = x \vee z = y))$

Schwache Versionen der Axiome:
FORDERN DIE EXISTENZ EINER <u>OBER</u>MENGE

Starke Versionen der Axiome:
FORDERN DIE EXISTENZ EINER EXAKT DEFINIERTEN MENGE

<u>Bem.</u> I.a. ist das schwache Axiom (Paar) <u>echt</u> schwächer als das starke Axiom:



	Ext
a	$\emptyset$
b	a,b $= A$

Hier ist das schwache Paaraxiom erfüllt. Aber nicht das starke, da für die Wahl $x = y = a$ kein Paar zu a,a existiert.

Def. Falls $\mathfrak{A} = (A, E)$ eine LST-Struktur ist, so heißt $a \in A$ eine **universelle Menge** falls f.a. $b \in A$ gilt $b \, E \, a$.

[Dies wäre eine "Menge aller Mengen".]

Wir schreiben dies als das

Axiom der Universellen Menge

(Univ) $\exists y \, \forall z \; z \in y$ [Dual zum Axiom der leeren Menge].

Wir haben gesehen:

$$\text{Univ} \Longrightarrow \text{SchwPaar}.$$

wohingegen

$$\text{Univ} \not\Longrightarrow \text{StPaar}.$$

Potenzmengenaxiom (Pot):

Zu jeder Menge x gibt es eine Menge, die alle Teilmengen von x enthält.

Also:

$$\forall x \exists y \forall z\, (z \subseteq x \to z \in y).$$

SCHWACHES POTENZMENGENAXIOM

$\leftrightarrow$

STARKES POTENZMENGENAXIOM

DEFINIERT DURCH

$$\boxed{x \subseteq y} \;:\Longleftrightarrow\; \forall z\,(z \in x \longrightarrow z \in y)$$

RELATIONALE SPRACHERWEITERUNG

Sei $\mathfrak{A} = (A, E)$ eine LST-Struktur und $a, b \in A$. Dann sagen wir

<u>a ist eine $\mathfrak{A}$-Teilmenge von b</u>

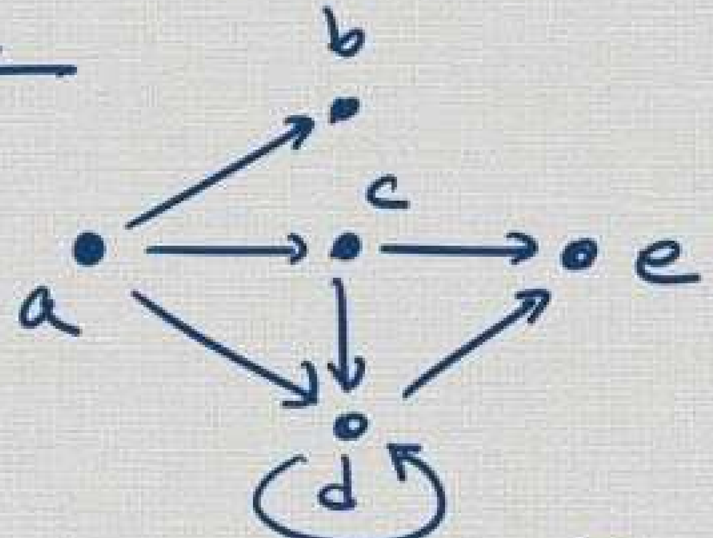
falls f.a. $c \in A$ wenn cEa, dann cEb

$$\Longleftrightarrow\; \mathfrak{A}\frac{a\,b}{x\,y} \models \forall z\,(z \in x \longrightarrow z \in y)$$

Wir stellen fest, daß a eine $\mathfrak{A}$-TM von b ist genau dann, wenn

$$\mathrm{Ext}(a) \subseteq \mathrm{Ext}(b).$$

Bsp.



$A = \{a, b, c, d, e\}$

E wie durch Pfeile angegeben

	$\cdot$ Ext
a	$\emptyset$
b	a
c	a
d	a, c, d
e	c, d

Daraus folgt:
$\mathfrak{A} \models \text{Leer} \wedge \neg \text{Ext}.$

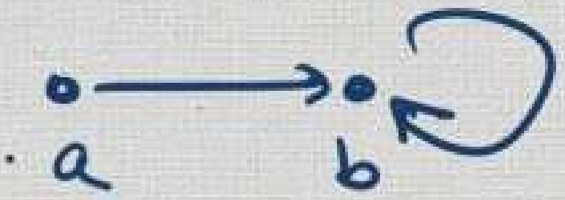
$\mathfrak{A}$-TM von a : a
$\mathfrak{A}$-TM von b : a, b, c
$\mathfrak{A}$-TM von c : a, b, c
$\mathfrak{A}$-TM von d : a, b, c, d, e
$\mathfrak{A}$-TM von e : a, e

Da $\mathfrak{A} \models \neg \text{Ext}$ ist es möglich, daß es mehr als eine Potenzmenge gibt.

Def. x ist eine Potenzmenge von y gdw
f.a. $z \in A$ $zEx \Longleftrightarrow$ z ist $\mathfrak{A}$-TM von y

Bsp. b und c sind Potenzmengen von a
Alle anderen Elemente haben keine Potenzmenge.

Verhältnis vom schwachen zum starken Potenzmengenaxiom:



	Ext
a	$\emptyset$
b	a, b

Auch hier gilt wieder: die Ex. einer universellen Menge macht schwPot trivialerweise wahr:

$$\mathrm{Univ} \Longrightarrow \mathrm{schwPot}$$

$\mathfrak{A}$-TM von a : a

$\mathfrak{A}$-TM von b : a, b

Stellen fest: b ist Potenzmenge von b, aber a hat keine Potenzmenge in $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A} \not\models \mathrm{stPot}$$

D.h. $\mathrm{Univ} \not\Longrightarrow \mathrm{stPot}$.

Theorem Falls $\mathfrak{A} \models \mathrm{stPaar} + \mathrm{Leer}$, so muß A unendlich sein.

Üblich bei Axiomensystemen + statt $\wedge$ zu schreiben.

Beweis Wir beweisen, daß A unendlich ist, indem wir eine Injektion von $\mathbb{N}$ nach A konstruieren. Dies tun wir rekursiv.

Sei $a \in A$ eine leere Menge. [Nicht notwendigerweise eindeutig.]

Für $x \in A$ sei $f(x) \in A$ so daß

$$\mathrm{Ext}(f(x)) = \{x\}.$$

Dies existiert nach stPaar, ist aber i.d.R. nicht eindeutig. [Ggf. wenden wir hier das Auswahlaxiom.]

REKURSION $\quad F(0) := a$

$$F(n+1) := f(F(n)).$$

Dann ist $F : \mathbb{N} \longrightarrow A$ eine Funktion.

Zu zeigen: F injektiv.

Ang. nicht. Dann ex. $n < m$ mit $F(n) = F(m)$.

Sei n minimal mit dieser Eigenschaft.

Da $F(0)$ eine leere Menge ist und $F(k+1)$ eine nichtleere Menge ist (f.a. k) gilt: $n > 0$.

Also finde k, ℓ, so daß $n = k+1$

$m = \ell + 1$.

$$F(n) = \underline{F(k+1) = F(l+1)} = F(m)$$

$$F(k+1) = f(F(k)) \qquad F(l+1) = f(F(l))$$

Hat Extension $\{F(k)\}$ — Hat Extension $\{F(l)\}$.

(*)

$$\Longrightarrow \quad F(k) = F(l)$$

Dies ist ein Widerspruch zur Minimalität von n.
[Da $k < n$.]

q.e.d.

<u>Bem.</u> Dieser Beweis verwendet notwendigerweise stPaar:

(1) $\bullet \longrightarrow \bullet\circlearrowleft \ \models$ schwPaar + Leer
ist ein endliches Modell

(2) Der Schritt (*) im Beweis benutzt, daß die Extension von $f(F(k))$ eindeutig bestimmt ist.

$x, y \longmapsto x \cup y$

„Kleines" Vereinigungsmengenaxiom ($\cup$-Ax):

Zu je zwei Mengen x und y gibt es eine Menge, die alle Elemente von x und y enthält.

Also:

$$\forall xy\,\exists w\,\forall z\,(z \in x \lor z \in y \to z \in w).$$

SCHW $\cup$-Ax. $\longleftrightarrow$ ST $\cup$-Ax.

$X \longmapsto \bigcup X$

„Großes" Vereinigungsmengenaxiom ($\bigcup$-Ax):

Zu jeder Menge X gibt es eine Menge, die alle Elemente der Elemente von X enthält.

Also:

$$\forall X\,\exists y\,\forall x\,z\,(x \in X \land z \in x \to z \in y).$$

SCHW. $\bigcup$-Ax. $\longleftrightarrow$ ST. $\bigcup$-Ax.

Auch hier:

Univ $\Longrightarrow$ schw $\cup$-Ax
schw $\bigcup$-Ax

Insbesondere

$\bullet \longrightarrow \bullet\circlearrowleft \;\models$ schw $\cup$-Ax. $\wedge$ schw $\bigcup$-Ax.

Falls das st. Axiom + Ext gelten, so ist die Vereinigung eindeutig bestimmt und wir dürfen $x \cup y$ und $\bigcup X$ als Symbole verwenden.

[FUNKTIONALE SPRACHERWEITERUNG]

NOTATION

$\bigcup_{i \in I} X_i$ — I Indexmenge

$\downarrow$

$\{X_i ; i \in I\}$

Falls X eine Menge von Menge ist, so ist

$\bigcup X = \{z ; \exists x \in X (z \in x)\}$

Bsp.

$\mathfrak{A} = (A, E)$

$A = \{a\}$

$E = \{(a,a)\}$

	Ext
a	$\{a\} = A$

a-TM von a: a

Ext ✓
Leer ✗
Univ ✓
schw Paar ✓
schw Pot ✓
schw $\cup$-Ax ✓
schw $\bigcup$-Ax ✓
st Paar ✓
st Pot ✓
st $\cup$-Ax ✓
st $\bigcup$-Ax ✓

Es gilt: $a = \{a\}$.
Es gilt: $a = \mathfrak{P}(a)$.
Es gilt: $a = a \cup a$.
Es gilt: $a = \bigcup a$.

$$\bigcup a = \{x \in A ; \exists y (y \in a \wedge x \in y)\}$$

Bem. Da $\mathfrak{A} \models$ Ext + st Paar + st Pot + st $\cup$-Ax + st $\bigcup$-Ax kann Leer nicht im Beweis des vorigen Unendlichkeitssatzes durch andere Axiome unserer Liste ersetzt werden.

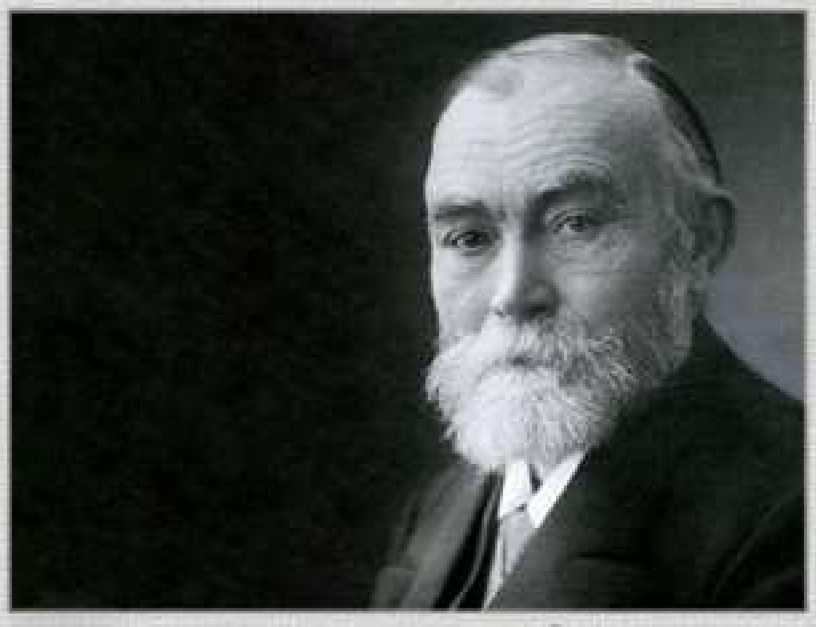
In der Mathematik wollen wir i.d.R. Mengen wie folgt spezifizieren:

$\{x\}$

$\{x,y\}$

$$\boxed{\underline{\{x \,;\, \Phi(x)\}}}$$

wobei Φ eine Eigenschaft [Formel] ist.



GOTTLOB FREGE (1848–1925)

KOMPREHENSIONSAXIOM(ENSCHEMA) (Komp)

Sei Φ eine Formel mit einer freien Variable x:

$$(\mathrm{Komp}_\Phi) \quad \exists y \,\forall z \left(z \in y \leftrightarrow \Phi\tfrac{z}{x} \right)$$

Das Komprehensionsaxiom würde uns die Mengenbildung $\{x ; \Phi(x)\}$ erlauben.

Beachte: Falls $\Phi(x) :\Longleftrightarrow x \equiv x$, so ist Komp_Φ logisch äquivalent zu (Univ).

$$\mathrm{Komp} \Longrightarrow \mathrm{Univ}.$$

BERTRAND RUSSELL
3RD EARL RUSSELL
1872–1970

Theorem (Russell 1901).

Falls $\mathfrak{A} = (A, E)$ eine LST-Struktur ist, so gilt

$$\mathrm{Komp}_{\Phi}$$

nicht für die Formel)

$$\Phi(x) :\iff \neg x \in x$$

RUSSELL-FORMEL

Beweis Ang. $\mathfrak{A} \models \boxed{\exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \neg z \in z)}$.

Sei $a \in A$ s.d. $\mathfrak{A}\frac{a}{y} \models \forall z (z \in y \leftrightarrow \neg z \in z)$

Setze $z := a$, d.h.

$$\mathfrak{A}\frac{a}{y}\frac{a}{z} \models z \in y \leftrightarrow \neg z \in z$$

D.h. $a E a$ gdw nicht $a E a$.

Widerspruch!

q.e.d.

Damit muß man Abschied vom Komprehensionsschema nehmen!

Wie lösen wir den Wunsch nach einem Mengenbildungsprinzip der Form $\{x; \Phi(x)\}$ in Gegenwart des Russellbeweises auf?

ZERMELO 1908:

Statt Komprehension aller Mengen mit Eigenschaft Φ werden aus einer Menge diejenigen mit Eig. Φ ausgesondert.

AUSSONDERUNGSAXIOM

$$\rightsquigarrow \forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \Phi(z))$$

[Spezialfall von Komprehension]

Dies erlaubt [mit Ext] die Mengenbildung

$$\{z \in x ; \Phi(z)\}.$$

OFFIZIELLE VERSION VON (Aus_Φ):

Sei Φ eine Formel mit $n+1$ freien Variablen $x_0, x_1, \ldots, x_n$

$$\forall x \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \Phi(z, x_1, \ldots, x_n)).$$

Dann ist (Aus) das Schema aller (Aus_Φ).

Komp_Φ $\{z ; \Phi(z)\}$

$$\exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \Phi(z))$$

Anwendungen

(1) Aus impliziert, daß

$$\text{schwPaar} \Longrightarrow \text{stPaar}$$
$$\text{schwPot} \Longrightarrow \text{stPot}$$
$$\text{schw } \cup\text{-Ax} \Longrightarrow \text{st } \cup\text{-Ax}$$
$$\text{schw } \bigcup\text{-Ax} \Longrightarrow \text{st } \bigcup\text{-Ax}.$$

[z.B. schwPaar gibt uns für $a, b \in A$ ein c mit $a, b \in c$. Aus gibt uns

$$\{x \in c \,;\, x \equiv a \vee x \equiv b\}$$

Beachte die Verwendung von Parametern.]

(2) Aus $\Longrightarrow$ Leer

[Nach Def. ist eine LST-Struktur $\mathfrak{A} = (A, E)$ immer nichtleer. Finde $a \in A$ und sondere aus nach $\Phi(z) :\Leftrightarrow \neg z \equiv z$.]

(3) Wir werden Montag sehen:

$$\text{Aus} \Longrightarrow \neg\,\text{Univ}.$$

In Umgangssprache:

"Es gibt keine Menge aller Mengen."