MLML IV

19. April 2021
SOMMERSEMESTER 2021

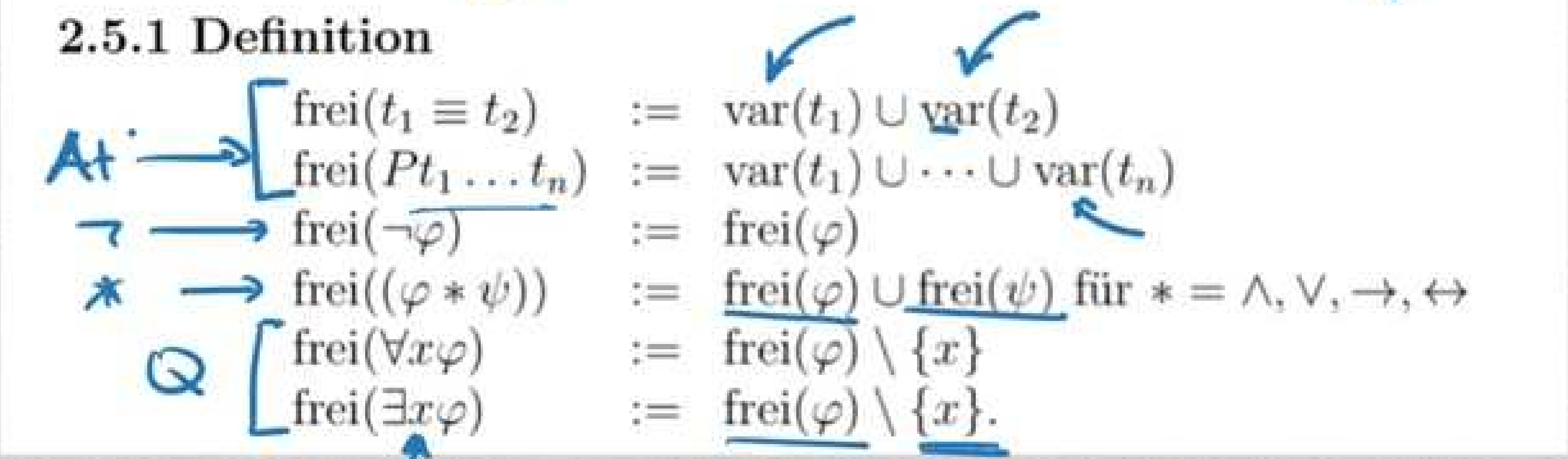
REKURSION über Term- & Formelaufbau

Funktion	$\hat{F}: \underline{T}^S \longrightarrow Z$	$\hat{F}: \underline{L}^S \longrightarrow Z$
benötigt	$F: \underline{V \cup S_K} \longrightarrow Z$ $F_f: \underline{Z}^n \longrightarrow Z$ $[\underline{f} \in S_F ; \sigma(f) = n]$	$F: \underline{At} \longrightarrow Z$ $F_*: \underline{Z}^2 \longrightarrow \underline{Z}$ $[* = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow]$ $F_\neg: \underline{Z} \longrightarrow \underline{Z}$ $F_Q: \underline{Z} \times V \longrightarrow \underline{Z}$ $[Q = \exists, \forall]$

Wesentlich: EINDEUTIGE LESBARKEIT
für die Wohldefiniertheit
INDUKTION AUF T^S und L^S
für Existenz & Eindeutigkeit

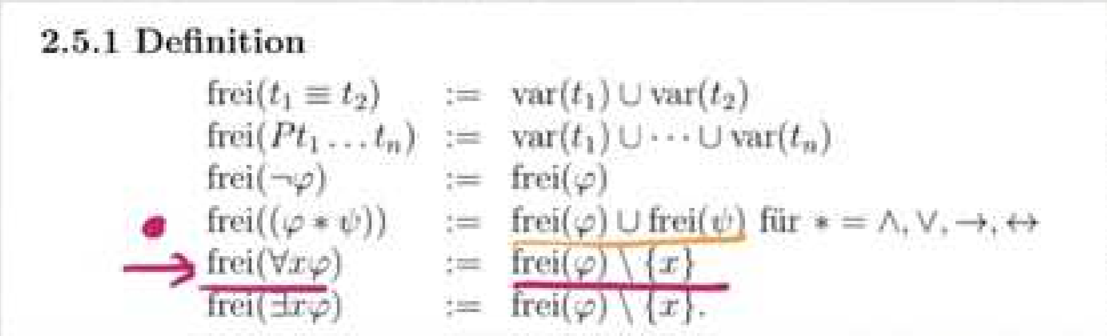
§2.5 Freie Variablen & Sätze.

Rekursive Def. nach dem Formelaufbau



2.5.1 Definition

$$\begin{array}{llll}
\text{At} \longrightarrow & \text{frei}(t_1 \equiv t_2) & := & \text{var}(t_1) \cup \text{var}(t_2) \\
 & \text{frei}(Pt_1 \dots t_n) & := & \text{var}(t_1) \cup \dots \cup \text{var}(t_n) \\
\neg \longrightarrow & \text{frei}(\neg\varphi) & := & \text{frei}(\varphi) \\
* \longrightarrow & \text{frei}((\varphi * \psi)) & := & \underline{\text{frei}(\varphi)} \cup \underline{\text{frei}(\psi)} \text{ für } * = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \\
Q & \text{frei}(\forall x \varphi) & := & \text{frei}(\varphi) \setminus \{x\} \\
 & \text{frei}(\exists x \varphi) & := & \underline{\text{frei}(\varphi)} \setminus \underline{\{x\}}.
\end{array}$$



2.5.1 Definition

$$\begin{aligned}
\text{frei}(t_1 \equiv t_2) &:= \text{var}(t_1) \cup \text{var}(t_2)\\
\text{frei}(Pt_1 \ldots t_n) &:= \text{var}(t_1) \cup \cdots \cup \text{var}(t_n)\\
\text{frei}(\neg\varphi) &:= \text{frei}(\varphi)\\
\text{frei}((\varphi * \psi)) &:= \text{frei}(\varphi) \cup \text{frei}(\psi) \text{ für } * = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\\
\text{frei}(\forall x \varphi) &:= \text{frei}(\varphi) \setminus \{x\}\\
\text{frei}(\exists x \varphi) &:= \text{frei}(\varphi) \setminus \{x\}.
\end{aligned}$$

$R, W, B \in S_R$

$\sigma(R) = \sigma(W) = \sigma(B) = 1$

Beispiele

$\text{frei}(Rx) = \{x\}$

$\text{frei}(Wx) = \{x\}$

$\varphi_1 = (Rx \longrightarrow Wx)$ $\qquad \text{frei}(\varphi_1) = \{x\}$

$\varphi_2 = \forall x(Rx \longrightarrow Wx)$ $\qquad \text{frei}(\varphi_2) = \emptyset$

$\varphi_3 = (\forall x(Rx \longrightarrow Wx) \wedge \overbrace{(Rx \longrightarrow Bx)}^{\{x\}})$ $\qquad \text{frei}(\varphi_3) = \emptyset \cup \{x\} = \{x\}$

$\varphi_4 = (\forall x(Rx \longrightarrow Wx) \wedge (Ry \longrightarrow By))$ $\{y\}$ $\qquad \text{frei}(\varphi_4) = \{y\}$

$\varphi_5 = (\forall x(Rx \longrightarrow Wx) \wedge \forall y(Ry \longrightarrow By))$ $\qquad \text{frei}(\varphi_5) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$

$\varphi_6 = (\forall x(Rx \longrightarrow Wx) \wedge \forall x(Rx \longrightarrow Bx))$ $\qquad \text{frei}(\varphi_6) = \emptyset$

$\varphi_7 = \underbrace{\forall x}_{①}(\underbrace{\forall x}_{③}(\underbrace{Rx}_{⑤} \underbrace{\longrightarrow}_{④} \underbrace{Wx}_{⑤}) \underbrace{\wedge}_{②} (\underbrace{Rx}_{⑤} \underbrace{\longrightarrow}_{④} \underbrace{Bx}_{⑤}))$ $\qquad \text{frei}(\varphi_7) = \emptyset$

Falls $x \in \text{frei}(\varphi)$, so sagen wir x ist frei in φ

x kommt in φ frei vor

x in φ vorkommt, aber $x \notin \text{frei}(\varphi)$, so sagen wir: x ist gebunden in φ

φ_7: ⑤ $\text{frei}(Rx) = \{x\}$ $\quad \text{frei}(Bx) = \{x\}$

$\text{frei}(Wx) = \{x\}$

④ $\text{frei}((Rx \longrightarrow Wx)) = \{x\} \cup \{x\} = \{x\}$

$\text{frei}((Rx \longrightarrow Bx)) = \{x\} \cup \{x\} = \{x\}$

③ $\{x\} \setminus \{x\} = \emptyset$

② $\rightsquigarrow \varphi_3$ $\quad \text{frei}(\varphi_3) = \{x\}$

① $\{x\} \setminus \{x\} = \emptyset$

Wertebereich / Skopus eines Quantors.

Beispielsatz aus der natürlichen Sprache:

Alle Blumen auf dieser Wiese sind weiß und alle Blumen auf jener Wiese sind blau.

$$\left(\textcircled{\forall x}\underbrace{(R_1 x \longrightarrow W x)} \wedge \textcircled{\forall x}\underbrace{(R_2 x \longrightarrow Bx)}\right)$$

ODER ?!?

$$\underline{\underline{\forall x}}\ \underbrace{\left((R\, x \longrightarrow Wx) \wedge (R_2 x \longrightarrow Bx)\right)}$$

Erste Bemerkung zur Bedeutung

$\boxed{x \equiv 0}$ ← mit freien Variablen

$S_K = \{0\}$ Konstantensymbol

Frage: Wahr oder falsch?

A: Das hängt davon ab, was x ist!

$\boxed{\forall x\ x \equiv 0}$ ← ohne freie Variablen

Frage: Wahr oder falsch?

A: Das hängt nicht von x ab. Es ist wahr, gdw es in der interpretierenden Struktur nur ein Element gibt.

Def. Ein S-Ausdruck φ ohne freie Variablen

$$[\text{also: } \mathrm{frei}(\varphi) = \emptyset]$$

heißt auch **S-Satz**.

[Sätze sind (innerhalb eines Interpretationskontexts) die Träger von Wahrheit und Falschheit.

Formeln mit freien Variablen brauchen eine **Belegung** der freien Variablen mit Objekten.]

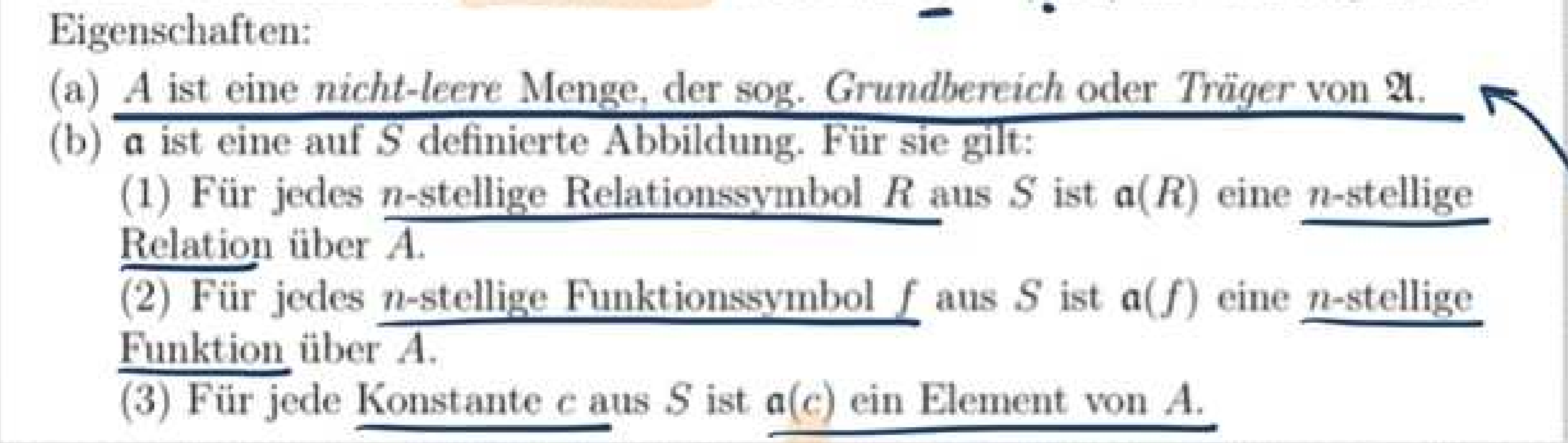
Wahrheit/Falschheit braucht immer einen Interpretationskontext:

Bsp. ① Jede stetige Fkt nimmt ein Maximum an.

② Jedes Polynom hat eine Nullstelle.

KAPITEL 3 : Semantik der Sprachen erster Stufe

§3.1 Strukturen & Interpretationen.



3.1.1 Definition Eine *S-Struktur* ist ein Paar $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) A ist eine *nicht-leere* Menge, der sog. *Grundbereich* oder *Träger* von $\mathfrak{A}$.

(b) $\mathfrak{a}$ ist eine auf S definierte Abbildung. Für sie gilt:

(1) Für jedes n-stellige Relationssymbol R aus S ist $\mathfrak{a}(R)$ eine n-stellige Relation über A.

(2) Für jedes n-stellige Funktionssymbol f aus S ist $\mathfrak{a}(f)$ eine n-stellige Funktion über A.

(3) Für jede Konstante c aus S ist $\mathfrak{a}(c)$ ein Element von A.

- UNIVERSUM
- ZUGRUNDELIEGENDE MENGE

Bsp. $S_F = \{\oplus\}$

$\underline{\sigma(\oplus) = 2}$

$A := \mathbb{Z}$

Bsp. für eine zweistellige Fkt. auf $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}$: $g : \underline{(x,y)} \longmapsto \underline{x^2 + y^3 \cdot x}$

$\mathfrak{a}(\oplus) := g$.

Dann wäre $(\mathbb{Z}, \mathfrak{a})$ eine S-Struktur mit $S = \{\oplus\}$.

Manchmal schreiben wir

$R^{\mathfrak{a}}$ für $\mathfrak{a}(R)$

$f^{\mathfrak{a}}$ für $\mathfrak{a}(f)$

$c^{\mathfrak{a}}$ für $\mathfrak{a}(c)$

Die Form des Symbols ist irrelevant für die Interpretation.

Def. (EFT 3.1.2)

Sei $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$ eine S-Struktur und V die Menge der Variablen. Dann heißt jede Funktion

$$\beta : V \longrightarrow A$$

eine **BELEGUNG** in $\mathfrak{A}$.

[**Bem.** Falls $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ zwei verschiedene Fkt. sind und $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$ und $\mathfrak{A}' = (A, \mathfrak{a}')$ sind S-Strukturen, so ist β eine Belegung in $\mathfrak{A}$ gdw β eine Belegung in $\mathfrak{A}'$.]

Def (EFT 3.1.3)

Sei $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$ eine S-Struktur und β eine Belegung. Dann nennen wir

$$\mathfrak{J} := (\mathfrak{A}, \beta)$$

eine **S-Interpretation.**

Def. Falls β eine Belegung in $\mathfrak{A}$ und $a \in A$ und $x \in V$, so schreiben wir

$$\beta\frac{a}{x} : y \longmapsto \begin{cases} \beta(y) & \text{falls } y \neq x \\ a & \text{falls } y = x \end{cases}$$

$\beta\frac{a}{x}$ ist die Belegung, die entsteht, wenn ich β an exakt der Stelle x abändere und $\beta\frac{a}{x}(x) = a$ setze.

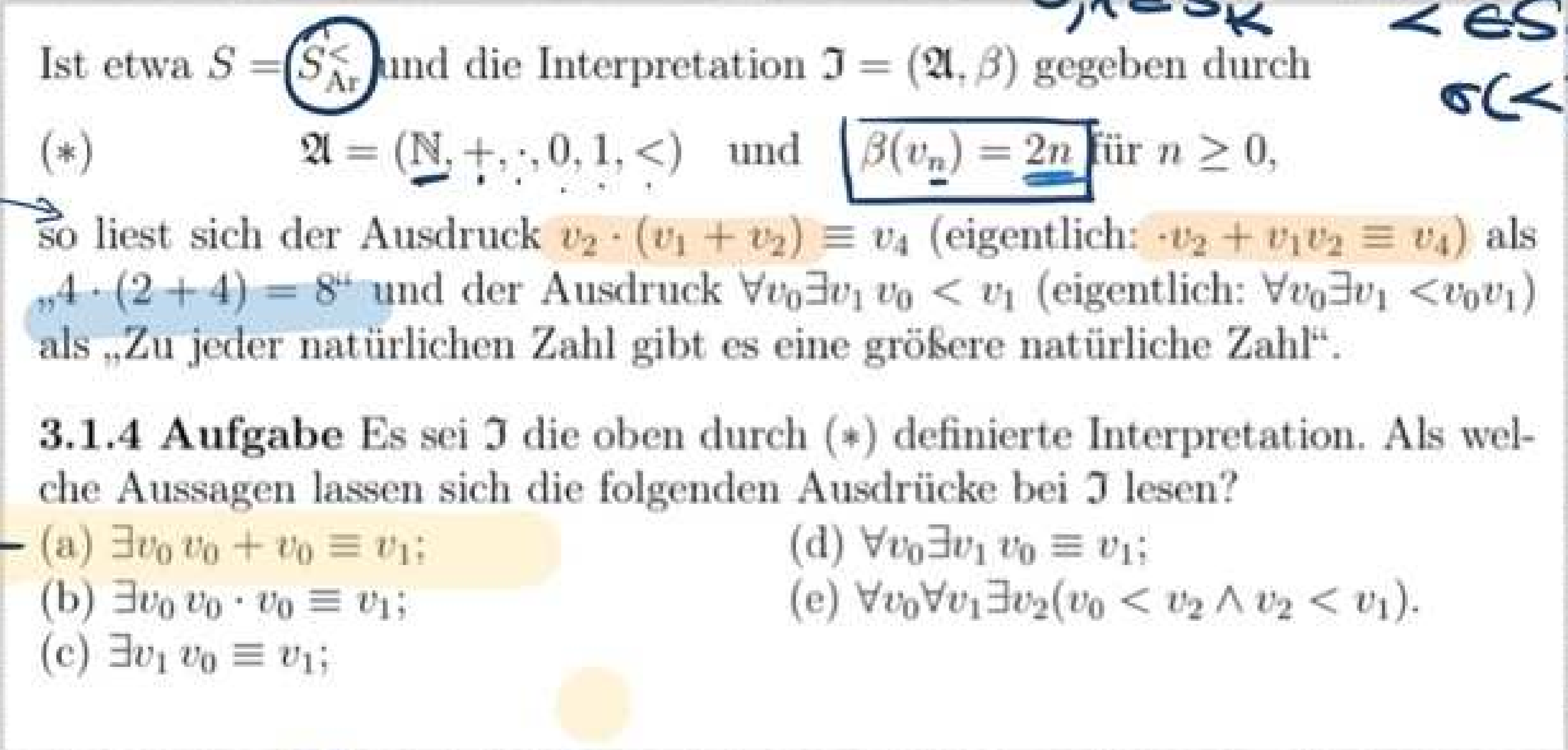
Def. Falls $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine S-Interpretation ist, $a \in A$, $x \in V$, so sei

$$\mathfrak{I}\frac{a}{x} := \left(\mathfrak{A}, \beta\frac{a}{x}\right).$$

$+, \cdot, 0, 1, <$ $\sigma(+) = \sigma(\cdot) = 2$ $+, \cdot \in S_F$

$0, 1 \in S_K$ $< \in S_R$

$\sigma(<) = 2$



Ist etwa $S = S^{<}_{\mathrm{Ar}}$ und die Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ gegeben durch

(*) $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, <)$ und $\beta(v_n) = 2n$ für $n \geq 0$,

so liest sich der Ausdruck $v_2 \cdot (v_1 + v_2) \equiv v_4$ (eigentlich: $\cdot v_2 + v_1 v_2 \equiv v_4$) als „$4 \cdot (2 + 4) = 8$" und der Ausdruck $\forall v_0 \exists v_1\, v_0 < v_1$ (eigentlich: $\forall v_0 \exists v_1 < v_0 v_1$) als „Zu jeder natürlichen Zahl gibt es eine größere natürliche Zahl".

3.1.4 Aufgabe Es sei $\mathfrak{I}$ die oben durch (*) definierte Interpretation. Als welche Aussagen lassen sich die folgenden Ausdrücke bei $\mathfrak{I}$ lesen?

(a) $\exists v_0\, v_0 + v_0 \equiv v_1$;
(b) $\exists v_0\, v_0 \cdot v_0 \equiv v_1$;
(c) $\exists v_1\, v_0 \equiv v_1$;
(d) $\forall v_0 \exists v_1\, v_0 \equiv v_1$;
(e) $\forall v_0 \forall v_1 \exists v_2 (v_0 < v_2 \wedge v_2 < v_1)$.

[$\exists v_0 (+ v_0 v_0 \equiv v_1)$ ist keine gültige EFT-Formel.]

$v_2 \longmapsto 2 \cdot 2 = 4$

$v_1 \longmapsto 2 \cdot 1 = 2$

$v_4 \longmapsto 2 \cdot 4 = 8$

$v_1 + v_2 \longmapsto 2 + 4 = 6$

$v_2 \cdot (v_1 + v_2) \longmapsto 4 \cdot 6 = 24$

Die Bedeutung von $\cdot v_2 + v_1 v_2 \equiv v_4$ ist also "$24 = 8$".

Also $\mathfrak{I}$ macht die Formel $\cdot v_2 + v_1 v_2 \equiv v_4$ falsch!

freie Variable

$\exists v_0\, v_0 + v_0 \equiv v_1$

$\exists v_0 + v_0 v_0 \equiv v_1$

$\beta(v_1) = 2 \cdot 1 = 2.$

Falls $\exists v_0\, v_0 + v_0 \equiv v_1$ wahr wäre, so müßte eine Variable existieren, die den Wert 1 bekommt; die gibt es nicht.

§ 3.3 Die Modellbeziehung

Definition über Rekursion nach Term- & Formelaufbau.

$\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$

3.3.1 Definition (a) Für eine Variable x sei $\boxed{\mathfrak{I}(x) := \beta(x).}$
(b) Für $c \in S$ sei $\boxed{\mathfrak{I}(c) := c^{\mathfrak{A}}}$
(c) Für n-stelliges $f \in S$ und Terme $t_1, \dots, t_n$ sei

$$\mathfrak{I}(ft_1 \dots t_n) := f^{\mathfrak{A}}(\mathfrak{I}(t_1), \dots, \mathfrak{I}(t_n)).$$

vgl. Bsp. auf der letzten Seite.

3.3.2 Definition der Modellbeziehung Für alle $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ setzen wir:

$\mathfrak{I} \models t_1 \equiv t_2$	:gdw[1]	$\mathfrak{I}(t_1) = \mathfrak{I}(t_2)$
$\mathfrak{I} \models Rt_1 \dots t_n$	:gdw	$\boxed{R^{\mathfrak{A}}}\mathfrak{I}(t_1) \dots \mathfrak{I}(t_n)$ (d.h., $R^{\mathfrak{A}}$ trifft zu auf $\mathfrak{I}(t_1), \dots, \mathfrak{I}(t_n)$)
$\mathfrak{I} \models \neg\varphi$	:gdw	nicht $\mathfrak{I} \models \varphi$
$\mathfrak{I} \models (\varphi \wedge \psi)$	:gdw	$\mathfrak{I} \models \varphi$ und $\mathfrak{I} \models \psi$
$\mathfrak{I} \models (\varphi \vee \psi)$	:gdw	$\mathfrak{I} \models \varphi$ oder $\mathfrak{I} \models \psi$
$\mathfrak{I} \models (\varphi \rightarrow \psi)$	:gdw	wenn $\mathfrak{I} \models \varphi$, so $\mathfrak{I} \models \psi$
$\mathfrak{I} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$	:gdw	$\mathfrak{I} \models \varphi$ genau dann, wenn $\mathfrak{I} \models \psi$
$\mathfrak{I} \models \forall x \varphi$	:gdw	für alle $a \in A$ gilt $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$
$\mathfrak{I} \models \exists x \varphi$	:gdw	es gibt ein $a \in A$ mit $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$.

Atomarer Fall.

LaTeX \models

$\boxed{c^{\mathfrak{A}} := \mathfrak{A}(c)}$

Modellbeziehung

$\models$

Beziehung zw. Interpretation $\mathfrak{I}$ und einer Formel φ.

SPRICH:
1. $\mathfrak{I}$ ist ein Modell von φ
2. φ gilt in $\mathfrak{I}$
3. φ ist wahr in $\mathfrak{I}$
4. $\mathfrak{I}$ macht φ wahr

[5. $\mathfrak{I}$ modelliert φ]

BEISPIEL

S Symbolmenge, $S = S_F \cup S_R \cup S_K$

$S_F = \{\oplus\}$ $\sigma(\oplus) = 2$

$S_R = \{\sqsubset\}$ $\sigma(\sqsubset) = 2$

$S_K = \{\mathbb{0}\}$

Grundmenge $A = \mathbb{Z}$

$\alpha(\oplus) := +$ ← das natürliche + auf $\mathbb{Z}$

$\alpha(\mathbb{0}) := 0$ ← die Null in $\mathbb{Z}$

$\alpha(\sqsubset) := <$ ← das natürliche "kleiner" in $\mathbb{Z}$.

Bsp. ① $\forall x \exists y \boxed{\sqsubset x y}$

Intuitive Interpretation: $\sqsubset xy$ heißt intuitiv $x<y$

Also: "für jedes x ex. ein y größer als x".

Wir erwarten daher, daß

für alle β: $(\mathbb{Z}, \alpha, \beta) \models \forall x \overline{\exists y \sqsubset x y}$.

Hoffnung: die rekursive Definition sollte genau das liefern.

$(\mathbb{Z}, \alpha, \beta) \models \sqsubset x y \underset{\text{(nach Def.)}}{\Longleftrightarrow} \beta(x) < \beta(y)$.

$[\text{da } < \; = \; \sqsubset^{\alpha}.]$

- $(\mathbb{Z}, \mathfrak{a}, \beta) \models \exists y \sqsubset xy$

$\overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow}$ es ex. $a \in \mathbb{Z}$ mit

$$(\mathbb{Z}, \mathfrak{a}, \beta\tfrac{a}{y}) \models \sqsubset xy$$

$\Longleftrightarrow$ es ex. $a \in \mathbb{Z}$ mit

$$\beta\tfrac{a}{y}(x) < \beta\tfrac{a}{y}(y) = a$$

$\Longleftrightarrow$ es ex. $a \in \mathbb{Z}$ mit $\beta\frac{a}{y}(x) < a$.

- $(\mathbb{Z}, \mathfrak{a}, \beta) \models \forall x \exists y \sqsubset xy$

$\overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow}$ für alle $b \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\underline{(\mathbb{Z}, \mathfrak{a}, \beta\tfrac{b}{x}) \models \exists y \sqsubset xy}$$

$\Longleftrightarrow$ für alle $b \in \mathbb{Z}$ ex. $a \in \mathbb{Z}$ mit

$$b = (\beta\tfrac{a}{y})\tfrac{b}{x}(x) < a$$

$\Longleftrightarrow$ für alle $b \in \mathbb{Z}$ ex $a \in \mathbb{Z}$ mit

$$b < a.$$