Mathematische Logik & Mengenlehre

III

15. APRIL 2021

INDUKTION ÜBER DEN TERMAUFBAU

Falls (T1') Jede Variable Eigenschaft E hat.
(T2') Jedes Konstantensymbol Eigenschaft E hat
(T3') Falls f ein Funktionssymbol mit $\sigma(f)=n$ ist und $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ Eigenschaft E haben, so hat $f\zeta_1 \dots \zeta_n$ Eigenschaft E

Dann hat jeder Term Eigenschaft E.

Beweis Ang. nicht. Ang. es ex. $t \in T^S$, der nicht Eig. E hat, aber (T1'), (T2'), (T3') sind für E erfüllt.
Finde [nach dem Prinzip der kleinsten Zahl auf $\mathbb{N}$] ein $t \in T^S$ ohne Eig. E mit $TAL(t) = N$ und für alle $t' \in T^S$ mit $TAL(t') < N$ gilt: t' hat Eig. E.

Fall 1 $N = 1$. Die einzigen Terme mit $TAL(t) = 1$ sind Variablen und Konstantensymbole. Also ist dieser Fall nach (T1') und (T2') ausgeschlossen.

Fall 2 $N > 1$, also $N = k+1$ für ein $k \geq 1$.
Dann ist t keine Variable & kein Konstantensymbol

D.h. $t = f\,\underbrace{t_1}_{\in T^S}\ldots\underbrace{t_n}_{\in T^S}$ mit $f \in S_F$
$\sigma(f) = n$.

Nach den Regeln für Termableitungen ex. $i_1, \ldots, i_n < k+1 = N$, so daß t_j in der Ableitung an Stelle i_j auftritt.

Daraus folgt $TAL(t_j) \leq i_j < k+1 = N$.

$\Longrightarrow$ nach Ann.: alle t_j haben Eigenschaft E.

Nach (T3') gilt also: t hat ebenfalls Eigenschaft E.

Widerspruch zur Annahme.

q.e.d.

<u>**Bsp.**</u> In Vorlesung II hatten wir Induktion nach dem Termaufbau angewandt, um zu zeigen, daß Terme keine Klammern enthalten.

INDUKTION ÜBER DEN FORMELAUFBAU.

Sei E eine Eigenschaft von Zeichenketten, so daß

(A1)′ Jeder S-Ausdruck der Gestalt $t_1 \equiv t_2$ hat die Eigenschaft E.
(A2)′ Jeder S-Ausdruck der Gestalt $Rt_1 \ldots t_n$ hat die Eigenschaft E.
] ATOMAR

(A3)′ Hat der S-Ausdruck φ die Eigenschaft E, so hat auch $\neg\varphi$ die Eigenschaft E.

(A4)′ Haben die S-Ausdrücke φ und ψ die Eigenschaft E, so haben auch $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ und $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ die Eigenschaft E.

(A5)′ Hat der S-Ausdruck φ die Eigenschaft E und ist x eine Variable, so haben auch $\forall x\varphi$ und $\exists x\varphi$ die Eigenschaft E.

Dann hat jeder S-Ausdruck die Eigenschaft E.

Beispiele (1) Kein Term hat eine Klammer.

(2) [Lemma 2.4.1a]
$\square$ ist weder ein Term noch ein Ausdruck.

[Beweis Eigenschaft E ist: $t \neq \square$.
Überlegen: Variablen und Konstantensymbole haben sicherlich E.
(T3') ist auch erfüllt, da eine Zeichenkette der Form $f\zeta_1 \ldots \zeta_n$ immer nicht leer ist, da f bereits vorkommt.

Genauso für Ausdrücke: Offensichtlich ist $\square$ kein atomarer Ausdruck, also sind (A1') und (A2') erfüllt.

Da (A3'), (A4'), (A5') Aussagen über Zeichenketten der Form

$$\neg\varphi$$

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$$

$$\vee$$

$$\rightarrow$$

$$\leftrightarrow$$

$$\begin{matrix}\exists \\ \forall\end{matrix} x \varphi$$

machen und diese nicht leer sind, gelten (A3'), (A4'), (A5') automatisch.]

③ Falls $f \in S_F$ <u>und</u> $\sigma(f) \underline{\geq 1}$, so ist f kein S-Term.

[Eigenschaft E: $t \neq f$.

(T1'), (T2'): da f keine Variable und kein Konstantensymbol ist.

(T3'): Falls $t = f\varphi_1 \ldots \varphi_n$ ein Term ist und $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ die Eigenschaft E haben.

Nach Bsp. ② wissen wir, daß $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \neq \square$. Also hat t Länge ≥ 2, und somit $t \neq f$.]

④ Hausaufgabe (H1.2) Jeder Ausdruck hat gleich viele öffnende wie schließende Klammern.

Theorem (Eindeutige Lesbarkeit).

2.4.2 Lemma (a) *Für alle Terme t, t' gilt: t ist kein echtes Anfangsstück von t' (d.h., es gibt kein von $\square$ verschiedenes ζ mit $t\zeta = t'$).*

(b) *Für alle Ausdrücke φ, φ' gilt: φ ist kein echtes Anfangsstück von φ'.*

2.4.3 Lemma (a) *Sind $t_1, \ldots, t_n$ und $t'_1, \ldots, t'_m$ Terme und ist*

$$t_1 \ldots t_n = t'_1 \ldots t'_m,$$

so ist $n = m$ und $t_i = t'_i$ für $1 \leq i \leq n$.

(b) *Sind $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ und $\varphi'_1, \ldots, \varphi'_m$ Ausdrücke und ist*

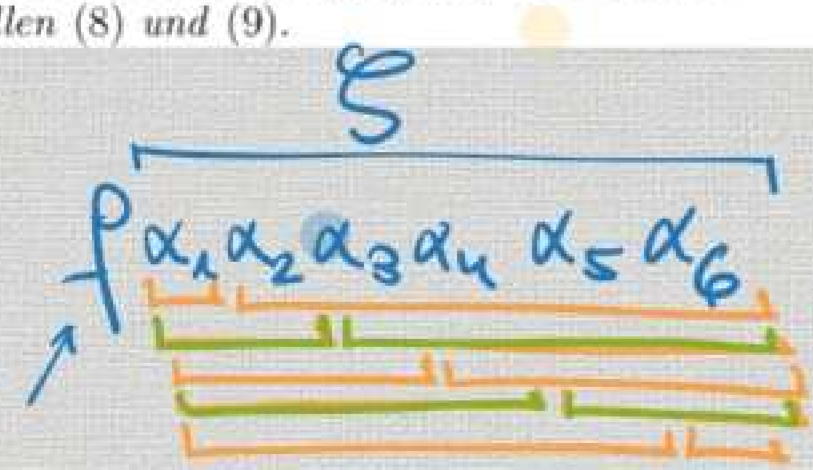
$$\varphi_1 \ldots \varphi_n = \varphi'_1 \ldots \varphi'_m,$$

so ist $n = m$ und $\varphi_i = \varphi'_i$ für $1 \leq i \leq n$.

2.4.4 Satz (a) *Jeder Term ist entweder eine Variable oder eine Konstante oder ein Term der Gestalt $ft_1 \ldots t_n$. Im letzten Fall sind das Funktionssymbol f und die Terme $t_1, \ldots, t_n$ eindeutig bestimmt.*

(b) *Jeder Ausdruck ist entweder ein Ausdruck der Gestalt (1) $t_1 \equiv t_2$ oder (2) $Rt_1 \ldots t_n$ oder (3) $\neg\varphi$ oder (4) $(\varphi \wedge \psi)$ oder (5) $(\varphi \vee \psi)$ oder (6) $(\varphi \to \psi)$ oder (7) $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ oder (8) $\forall x \varphi$ oder (9) $\exists x \varphi$.*
Dabei sind eindeutig bestimmt die Terme t_1, t_2 im Fall (1), das Relationssymbol R und die Terme $t_1, \ldots, t_n$ im Fall (2), der Ausdruck φ im Fall (3), die Ausdrücke φ und ψ in den Fällen (4), (5), (6), (7), die Variable x und der Ausdruck φ in den Fällen (8) und (9).

Wir wollen Lemma 2.4.2a beweisen.



$\sigma(f) = 2$

$\alpha_1\alpha_2$ ein Term

$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ ein Term

Beweis von L 24.2a:

Für Terme t, t' gilt: t ist kein echtes Anfangsstück von t' und umgekehrt.

<u>Hilfslemma</u>
- Falls $t \in T^S$ und t mit einer Variablen v anfängt, so ist $t = v$.
- Falls $t \in T^S$ und t mit einem $c \in S_K$ anfängt, so ist $t = c$.

<u>Beweis</u> Induktion nach Termaufbau.

E: falls t mit v anfängt, so ist $t = v$.

(T1') sicherlich wahr

(T2') sicherlich wahr, da Vor. falsch ist.

(T3') Falls $t = f g_1 \dots g_n$, so fängt t nicht mit Variable an: Vor. falsch.

Somit ist E wahr. qed (Hilfslemma)

---

t hat Eigenschaft E:

für alle $t' \in T^S$ gilt t' ist <u>kein</u> echtes Anfangsstück von t und umgekehrt.

(T1') $t = v$. Falls t' ein echtes Anfangsstück von t ist, so ist $t' = \square$.

Aber wir hatten gesehen, daß dies kein Term ist.

Ang. t sei echtes Anf.st. von t'.
$t = v$.

Also ist t' ein Term, der mit v anfängt.
Nach Hilfslemma ist $t' = v = t$, also ist t kein <u>echtes</u> AS von t'.

(T2') Ebenso, nur verwende man die zweite Aussage des Hilfslemmas.

(T3') Ang. $t = ft_1 \ldots t_n$, wobei $t_1, \ldots, t_n$ alle Eigenschaft E haben.
Müssen ~~zeigen~~, daß t Eig. E hat.

<u>Ang. nicht</u>:

<u>Fall 1</u> $t = ft_1 \ldots t_n = t'\xi$ mit $\xi \neq \square$

oder

<u>Fall 2</u> $t\xi = ft_1 \ldots t_n \xi = t'$

<u>Fall 1</u> Das erste ~~Zeichen~~ in t' muß f sein.
Also, nach Def. $t' = ft_1' \ldots t_n'$.

$$ft_1 \ldots t_n = ft_1' \ldots t_n' \xi$$

Falls $t_1 \neq t_1'$ und

$$f t_1 t_2 \dots t_n = f t_1' t_2' \dots t_n' \varrho ,$$

so müßte entweder t_1 ein echtes AS von t_1' oder umgekehrt sein. Da $t_1 \in$ erfüllt, kann das nicht sein:

$$t_1 = t_1'$$

Durch n-malige Anwendung dieses Arguments erhalten wir:

$$t_i = t_i' \quad \text{für } 1 \leq i \leq n.$$

$$f t_1 \dots t_n = f t_1 \dots t_n \boxed{\varrho}$$

$$\varrho = \square .$$

im Widerspruch zur Ann.

Fall 2 $t\varrho = t'$

$$f t_1 \dots t_n \varrho = f t_1' \dots t_n'$$

$$t_1 = t_1'$$

wiederum durch n-malige Anwendung:

$$\varrho = \square .$$

q.e.d.
L 2.4.2.a

REKURSION ÜBER DEN TERMAUFBAU

Sei Z eine beliebige Menge.
Sei V die Menge der Variablen und seien die folgenden Funktionen gegeben:

$$F : V \cup S_K \longrightarrow Z$$

$$F_f : Z^n \longrightarrow Z \quad \text{f.a. } f \in S_F,\ \sigma(f) = n$$

Dann ex. eine eindeutig bestimmte Fkt.

$$\longrightarrow \hat{F} : T^S \longrightarrow Z$$

mit

REKURSIONS-GLEICHUNGEN

$$\hat{F}(v) = F(v)$$

$$\hat{F}(c) = F(c)$$

$$\hat{F}(f t_1 \dots t_n) = F_f(\hat{F}(t_1), \dots, \hat{F}(t_n))$$

<u>Bem.</u> Die Eindeutigkeit und Existenz folgt aus der eindeutigen Lesbarkeit.
Existenz ist ein Induktionsbeweis über den Termaufbau: wir werden dies im Mengenlehre-kapitel zum Rekursionssatz im Detail sehen.
Eindeutigkeit: folgt aus der eind. Lesbarkeit.

REKURSION ÜBER DEN FORMELAUFBAU

Sei Z eine beliebige Menge und sei At die Menge der atomaren S-Formeln.

Sei $F : At \longrightarrow Z$

und

$$F_\wedge : Z^2 \longrightarrow Z$$
$$F_\vee : Z^2 \longrightarrow Z$$
$$F_\rightarrow : Z^2 \longrightarrow Z$$
$$F_\leftrightarrow : Z^2 \longrightarrow Z$$
$$F_\neg : Z \longrightarrow Z$$
$$F_{\forall,x} : Z \longrightarrow Z \quad \text{für } x \text{ Variablen}$$
$$F_{\exists,x} : Z \longrightarrow Z$$

Dann gibt es eine eindeutig best. Fkt

$$\hat{F} : L^S \longrightarrow Z \quad \text{mit}$$

$$\hat{F}(\varphi) = F(\varphi) \quad \varphi \text{ atomar}$$
$$\hat{F}(\neg\varphi) = F_\neg(\hat{F}(\varphi))$$
$$\hat{F}(\varphi \begin{smallmatrix}\wedge\\ \vee\\ \rightarrow\\ \leftrightarrow\end{smallmatrix} \psi) = F_{\begin{smallmatrix}\wedge\\ \vee\\ \rightarrow\\ \leftrightarrow\end{smallmatrix}}(\hat{F}(\varphi), \hat{F}(\psi))$$
$$\hat{F}(\begin{smallmatrix}\forall\\ \exists\end{smallmatrix} x\,\varphi) = F_{\begin{smallmatrix}\forall\\ \exists\end{smallmatrix},x}(\hat{F}(\varphi)).$$

Beispiele

① Länge eines Terms. $Z = \mathbb{N}$

$$F(v) = F(c) = 1.$$

$$F_f(k_1, \ldots, k_n) = k_1 + \ldots + k_n + 1.$$

$$\hat{F}(f t_1 \ldots t_n) = F_f(\underbrace{\underbrace{\hat{F}(t_1)}_{k_1}, \ldots, \underbrace{\hat{F}(t_n)}_{k_n})}_{k_1 + \ldots + k_n + 1}.$$

[FAKE-Beispiel: Diese Funktion bedarf keiner Rekursion.]

② Die Fkt $\mathrm{anz}_\alpha(\varphi)$ aus Gruppenarbeit #1.

Sei $f \in S_F$. Definiere anz_f als $\hat{F}$ für:

$$F(v) = F(c) = 0$$

$g \in S_F$
$$F_g(k_1, \ldots, k_n) \begin{cases} = k_1 + \ldots + k_n & \text{falls } g \neq f \\ = k_1 + \ldots + k_n + 1 & \text{falls } g = f \end{cases}$$

[Fake-Beispiel: Wiederum bedarf es hier keiner Rekursion.]

③ Schachtelungstiefe

Sei $f \in S_F$, $\sigma(f) = 2$. Wir wollen

$f(v,w)$ ← Schachtelungstiefe 1

$f(f(v_1,v_2),w)$ ← Schachtelungstiefe 2

$f(f(v_1,v_2),f(w_1,w_2))$

$f(f(v_1,f(u_1,u_2)),w)$ ← Schachtelungstiefe 3

$$F(v) = F(c) = 0$$

$$F_f(k_1,k_2) = \max(k_1,k_2) + 1.$$

Die durch diese Rekursionsgleichungen def. Fkt. $\hat{F}$ ist die Schachtelungstiefe.

4 var(t): die in t vorkommenden Variablen.
Z ist die Potenzmenge der Variablenmenge V.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}(x) &:= \{x\} \\
\mathrm{var}(c) &:= \emptyset \\
\mathrm{var}(ft_1 \ldots t_n) &:= \mathrm{var}(t_1) \cup \ldots \cup \mathrm{var}(t_n).
\end{aligned}
$$

[Das bedarf eigentlich auch keiner Rekursion.]

5 TA(φ): die Menge der Teilausdrücke von φ.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{TA}(t_1 \equiv t_2) &:= \{t_1 \equiv t_2\} \\
\mathrm{TA}(Rt_1 \ldots t_n) &:= \{Rt_1 \ldots t_n\} \\
\mathrm{TA}(\neg\varphi) &:= \{\neg\varphi\} \cup \mathrm{TA}(\varphi) \\
\mathrm{TA}((\varphi * \psi)) &:= \{(\varphi * \psi)\} \cup \mathrm{TA}(\varphi) \cup \mathrm{TA}(\psi) \\
&\quad\ \text{für } * = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \\
\mathrm{TA}(\forall x\varphi) &:= \{\forall x\varphi\} \cup \mathrm{TA}(\varphi) \\
\mathrm{TA}(\exists x\varphi) &:= \{\exists x\varphi\} \cup \mathrm{TA}(\varphi).
\end{aligned}
$$

Noch einmal:

Warum ist eindeutige Lesbarkeit so wichtig für Rekursion:

Bsp. $A = \{ ||, ||| \}$

Dies ist ein Alphabet, welches nicht unsere Lesbarkeitskonventionen erfüllt:

||||| kann entweder als $|| \cdot |||$ oder als $||| \cdot ||$ gelesen werden.

Versuchen Sie z. B. nun durch

$$F(||) = a$$
$$F(|||) = b$$

eine Fkt. rekursiv zu definieren,

$|| \cdot ||| \cdot || \cdot |||$ $\rightsquigarrow$ abab

ohne Grenzpkte nicht eindeutig lesbar.

$$\hat{F}(|||||) = \begin{cases} ab \\ ba \end{cases} \text{ je nach Lesart}$$