Mathematische Logik & Mengenlehre

MLML II

12. April 2021

Alphabet $\mathbb{A}$, $\alpha \in \mathbb{A}$ Zeichen/Symbol.

$\mathbb{A}^*$: endliche Folgen von Symbolen — ERINNERUNG

Zeichenreihe

Zeichenkette

Die Länge einer Zeichenkette / leere Zeichenreihe $\square$ mit Länge Null.

→ Falls ζ, ζ' Zeichenreihen, so heißt ζ Anfangsstück von ζ', falls $\zeta = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ und $\zeta' = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \dots, \alpha_\ell)$. und echtes Anf.st. falls $\ell > n$.

§ 2.2 Das Alphabet einer Sprache erster Stufe

2.2.1 Definition Das *Alphabet einer Sprache erster Stufe* umfasst folgende Zeichen:

unendlich viele

(a) $v_0, v_1, v_2, \dots$ (*Variablen*);

(b) $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ (*nicht, und, oder, wenn – so, genau dann wenn*); — VERKNÜPFUNGEN / JUNKTOREN

(c) $\forall, \exists$ (*für alle, es gibt*); — QUANTOREN

(d) $\equiv$ (*Gleichheitszeichen*);

(e)), ((*Klammersymbole*);

(f) (1) für jedes $n \geq 1$ eine (eventuell leere) Menge von *n-stelligen Relationssymbolen*; ← S_R

(2) für jedes $n \geq 1$ eine (eventuell leere) Menge von *n-stelligen Funktionssymbolen*; ← S_F

(3) eine (eventuell leere) Menge von *Konstanten*. ← S_K

KONSTANTENSYMBOLEN

LOGISCHE SYMBOLE

NICHT-LOGISCHE SYMBOLE

$S := S_R \cup S_F \cup S_K$

SYMBOLMENGE

Wir können eine Signatur angeben

$$\sigma : S_F \cup S_R \longrightarrow \mathbb{N}$$

die jedem Funktions- und Relations-symbol ihre Stelligkeit zuweist: → ARITY

$$\sigma(f) = n$$

falls f ein n-stelliges Funktions-symbol ist

$$\sigma(R) = n$$

falls R ein n-stelliges Relations-symbol ist.

Bezeichnen üblicherweise die logischen Symbole mit dem Buchstaben $\mathbb{A}$ und das Alphabet der Sprache erster Stufe mit Symbolmenge S als

$$A_S := \mathbb{A} \cup S.$$

Konvention: Alle vorkommenden Symbole sind unterschiedlich!!

§ 2.3 Terme und Ausdrücke in Sprachen erster Stufe

2.3.1 Definition *S-Terme* sind genau diejenigen Zeichenreihen in $\mathbb{A}_S^*$, welche man durch endlichmalige Anwendung der folgenden *Regeln* erhalten kann:

(T1) Jede Variable ist ein S-Term.

(T2) Jede Konstante aus S ist ein S-Term.

(T3) Sind die Zeichenreihen $t_1, \ldots, t_n$ S-Terme und ist f ein n-stelliges Funktionssymbol aus S, so ist $ft_1 \ldots t_n$ ein S-Term.

Die Menge der S-Terme bezeichnen wir mit T^S.

z.B.

$t_1 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$

$t_2 = \alpha_4\alpha_5\alpha_6$

$n = 2$

$ft_1t_2 =$

$f\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6$

Kein Auftauchen von:

$\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg, \exists, \forall,), ($!

Achtung:

Die herkömmliche Schreibweise von Funktionen:

$f(v_0, v_1)$

In unserer formalen Definition von S-Termen gibt es keine Klammern bei Funktionsanwendung.

Dies erleichtert Schreibweise durch Reduktion der Zahl der Klammern, aber erzeugt potentiell das folgende Problem:

$ft_1t_2 = ft_1't_2'$ mit $t_1 \neq t_1'$ und $t_2 \neq t_2'$.

<u>Außerdem</u>: Präfixnotation für Funktionen.

$f \in S_F$, $\sigma(f)=2$ binäre

v_0, v_1 Variablen

$f v_0 v_1 \longleftarrow f(v_0, v_1)$

Man beachte, daß manche Funktionen in der Mathematik nicht in Präfix- sondern in der Infixnotation geschrieben werden.

<u>Bsp.</u> $\underbrace{x+y}$ statt $+(x,y)$.

Falls wir eine Sprache mit $+ \in S_F$ und $\sigma(+)=2$ haben, so entstehen die Additionsterme wie folgt:

$$+ v_0 v_0 \longleftrightarrow v_0 + v_0$$

$$+ \underbrace{+ v_0 v_1} v_2 \longleftrightarrow (v_0 + v_1) + v_2$$

INFORMELLE(RE) VERSION DER DEFINITION:

(T1) Jede Var. ist S-Term.

(T2) Jedes Konst.symbol ist ein S-Term.

(T3) Falls $f \in S_F$, $\sigma(f)=n$ und $t_1, \dots, t_n$ sind S-Terme, so auch $f t_1 \dots t_n$

(*) Und dies sind alle!

Definition Eine endliche Folge von Zeichenketten

$$\xi_1 \dots \xi_n$$

heißt **Termableitung** falls für alle i mit $1 \le i \le n$ eine der folgenden drei Bed. gilt:

(T1') ξ_i ist eine Variable.

(T2') $\xi_i \in S_K$

(T3') es ex. $f \in S_F$, $\sigma(f) = k$ und es ex. $i_1, \dots, i_k < i$, so daß $\xi_i = f\xi_{i_1} \dots \xi_{i_k}$.

Def. Eine Zeichenkette ξ heißt **termableitbar** falls eine Termableitung $\xi_1 \dots \xi_n$ existiert, so daß $\xi = \xi_n$.

Man beachte, daß $\xi \in T^S \iff \xi$ ist termableitbar.

Wir beweisen, daß etwas ein Term ist, indem wir eine Termableitung angeben.

Bsp. aus EFT:

$$S_F = \{f, g\} \qquad \sigma(f) = 1$$
$$\qquad\qquad\qquad \sigma(g) = 2$$
$$S_R = \emptyset$$
$$S_K = \{c\}$$

$$g\,v_0\,f\,g\,v_4\,c$$

Bem. Dies ist ein S-Term.

Termableitung

1.	v_0	(T1')
2.	v_4	(T1')
3.	c	(T2')
4.	$g\,v_4\,c$	(T3') angewandt auf 2. & 3.
5.	$f\,g\,v_4\,c$	(T3') angewandt auf 4.
6.	$g\,v_0\,f\,g\,v_4\,c$	(T3') angewandt auf 1. & 5.

Termableitung

Ebenfalls Termableitung für diesen Term sind:

1-3-2-4-5-6
3-1-2-4-5-6
3-2-1-4-5-6
2-1-3-4-5-6
2-3-1-4-5-6
2-3-4-5-1-6
usw.

Zeigt, daß Termableitungen nicht eindeutig sind.

S-Formeln

2.3.2 Definition *S-Ausdrücke* sind genau diejenigen Zeichenreihen in $\mathbb{A}_S^*$, welche man durch endlichmalige Anwendung der folgenden Regeln erhalten kann:

(A1) Für S-Terme t_1, t_2 ist $t_1 \equiv t_2$ ein S-Ausdruck.

(A2) Sind $t_1, \ldots, t_n$ S-Terme und ist R ein n-stelliges Relationssymbol aus S, so ist $Rt_1 \ldots t_n$ ein S-Ausdruck.

ATOMARE Ausdrücke

(A3) Ist φ ein S-Ausdruck, so ist $\neg\varphi$ ein S-Ausdruck.

(A4) Sind φ und ψ S-Ausdrücke, so sind $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ und $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ S-Ausdrücke.

(A5) Ist φ ein S-Ausdruck und x eine Variable, so sind $\forall x\varphi$ und $\exists x\varphi$ S-Ausdrücke.

S-Ausdrücke, die wir mit (A1) und (A2) gewinnen können, heißen *atomar*, weil sie nicht aus anderen S-Ausdrücken zusammengesetzt sind. Man nennt $\neg\varphi$ das *Negat* von φ und $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ bzw. $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ die *Konjunktion*, *Disjunktion* (oder *Adjunktion*), *Implikation* bzw. *Äquijunktion* von φ und ψ.

Die Menge der S-Ausdrücke bezeichnen wir mit L^S. L^S heißt *die zur Symbolmenge S gehörende Sprache erster Stufe* (häufig auch *Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe*).

(A1) $t_1, t_2 \in T^S \rightsquigarrow t_1 \equiv t_2$ Termgleichung

(A2) $R \in S_R$, $\sigma(R) = n$, $t_1, \ldots, t_n \in T^S \rightsquigarrow Rt_1 \ldots t_n$ relationaler Ausdruck

(A3) φ S-Formel $\rightsquigarrow \neg\varphi$

(A4) φ, ψ S-Formeln $\rightsquigarrow$ $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$

(A5) φ S-Formel, x Variable $\rightsquigarrow$ $\exists x\varphi$, $\forall x\varphi$

Bemerkung

1. Keine Klammern bei relationalen Ausdrücken.
   D.h. falls $R \in S_R$, $\sigma(R) = 2$, x, y Variablen, so ist
   Rxy ein relationaler Ausdruck,
   aber $R(x,y)$ nicht.
2. Präfixnotation bei Relationen, <u>NICHT</u> Infix.

Wie beweisen wir so etwas eigentlich?

   Bsp. Falls $<$ ein Relationssymbol ist, so ist
   $$<xy$$ ein relationaler Ausdruck,
   <u>nicht</u> $x<y$.
3. Bei Quantoren keine Klammern:
   $\forall x \; \underline{x \equiv x}$ ist eine Formel.
   $\forall x \, (x \equiv x)$ ist <u>keine</u> Formel!
4. Bei Junktoren <u>immer</u> Klammern:
   $x \equiv x \wedge y \equiv y$ ist <u>keine</u> Formel!
   $\underline{(x \equiv x \wedge y \equiv y)}$ ist eine Formel.

<u>Definition</u> Eine endliche Folge von Zeichenketten $\zeta_1 \dots \zeta_n$ heißt

FORMELABLEITUNG falls für alle i mit $1 \leq i \leq n$ eine der folgenden fünf Bed. gilt:

(A1') Es ex. $t_1, t_2 \in T^S$ und

$\zeta_i = t_1 \equiv t_2$

Symbol

ζ_i ist die Zeichenkette $t_1 \equiv t_2$

(A2') Es ex. $R \in S_R$, $\sigma(R) = k$, ex. $t_1, \dots, t_k \in T^S$ mit

$\zeta_i = R t_1 \dots t_n$.

(A3') Es ex. $j < i$ mit

$\zeta_i = \neg \zeta_j$

(A4') Es ex. $j_1, j_2 < i$ mit

$\zeta_i = (\zeta_{j_1} \wedge \zeta_{j_2})$

oder $= (\zeta_{j_1} \vee \zeta_{j_2})$

oder $= (\zeta_{j_1} \rightarrow \zeta_{j_2})$

oder $= (\zeta_{j_1} \leftrightarrow \zeta_{j_2})$

(A5') Es ex. $j < i$ und Variable x mit $\zeta_i = \exists x \zeta_j$ oder $\forall x \zeta_j$.

φ heißt formelableitbar falls eine Formelableitung $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ ex. mit $\varphi_n = \varphi$.

Wie zuvor:

φ ist ein S-Ausdruck

$\iff$

φ ist formelableitbar

Bsp. $\forall v_0 \forall v_1 (Rv_0v_1 \rightarrow Rv_1v_0)$

Formel, die üblicherweise interpretiert wird als Symmetrie von R.

Zunächst: Da v_0, v_1 Variablen sind, sind sie (*) nach (T1) Terme.

1. Rv_0v_1 (A2') angew. auf (*)
2. Rv_1v_0 (A2') angew. auf (*)
3. $(Rv_0v_1 \rightarrow Rv_1v_0)$ (A4') mit $\rightarrow$ angew. auf 1. & 2.
4. $\forall v_1 (Rv_0v_1 \rightarrow Rv_1v_0)$ (A5') mit $\forall$ angew. auf 3.
5. $\forall v_0 \forall v_1 (Rv_0v_1 \rightarrow Rv_1v_0)$ (A5') mit $\forall$ angew. auf 4

Bem. (1) Auch hier keine Eindeutigkeit:
z.B. ist auch
$$2-1-3-4-5$$
eine Formelableitung der gleichen Formel.

(2) Die Ableitung bestimmt eindeutig, wo Klammern hinkommen.

Zurück zur Frage:
Wie beweisen wir eigentlich, daß etwas kein Term / keine Formel ist?

§ 2.4 Induktion im Term- und Ausdruckskalkül.

Falls $t \in T^S$, so existiert eine natürliche Zahl n, die minimal ist, so daß t eine Termableitung der Länge n hat.

$$\mathrm{TAL}(t) := \min\{n \,;\, \text{es ex. eine Termabl. der Länge } n \text{ von } t\}.$$

INDUKTION ÜBER DIE ABLEITUNGSLÄNGE:

Sei E eine Eigenschaft von Zeichenketten für die gilt:

(1) Alle Terme t mit $TAL(t) = 1$ haben Eigenschaft E.

(2) Falls alle Terme t mit $TAL(t) = n$ Eigenschaft E haben, so haben alle Terme t' mit $TAL(t') = n+1$ die Eigenschaft E.

Dann haben alle Terme Eigenschaft E.

<u>Beweis</u> Standard - Vollständige Induktion auf $\mathbb{N}$.

<u>UMFORMULIERUNG</u>

(1) bedeutet einfach:
Alle Variablen und Konstantensymbole haben Eigenschaft E.

(2) sagt:
falls $t_1, \dots, t_n$ alle Eigenschaft E erfüllen und $f \in S_F$, $\sigma(f) = n$, so erfüllt $ft_1 \dots t_n$ Eigensch. E.

INDUKTION ÜBER DEN TERMAUFBAU

Sei E eine Eigenschaft von Zeichenketten, so daß

1. alle Variablen und Konstantensymbole E haben;
2. falls $t_1, \dots, t_n$ Eigenschaft E haben und $f \in S_F$, $\sigma(f) = n$, so hat $ft_1 \dots t_n$ Eig. E.

Dann haben alle Terme Eig. E.

Mit dieser Induktion können wir nun beweisen, daß etwas ~~k~~ kein Term ist:

ξ mit Eigenschaft E'

Zeige per Induktion, daß jeder Term die Eigenschaft „hat nicht E'" hat.

<u>Bsp.</u> $f \in S_F \quad \sigma(f) = 2$

<u>Beh.</u> $\boxed{f(v_0, v_0)} \notin T^S$.

Eigenschaft E: "enthält keine Klammer".

(1) Variablen + Konst. enthalten keine Klammer

(2) Falls $t_1, \ldots, t_n$ keine Klammer enthalten, so auch nicht $ft_1 \ldots t_n$.

$\overset{\Longrightarrow}{\text{IND.}}$ Jeder Term enthält keine Klammer.

Also ist $f(v_0, v_0)$ kein Term.