Mathematische Logik & Mengenlehre

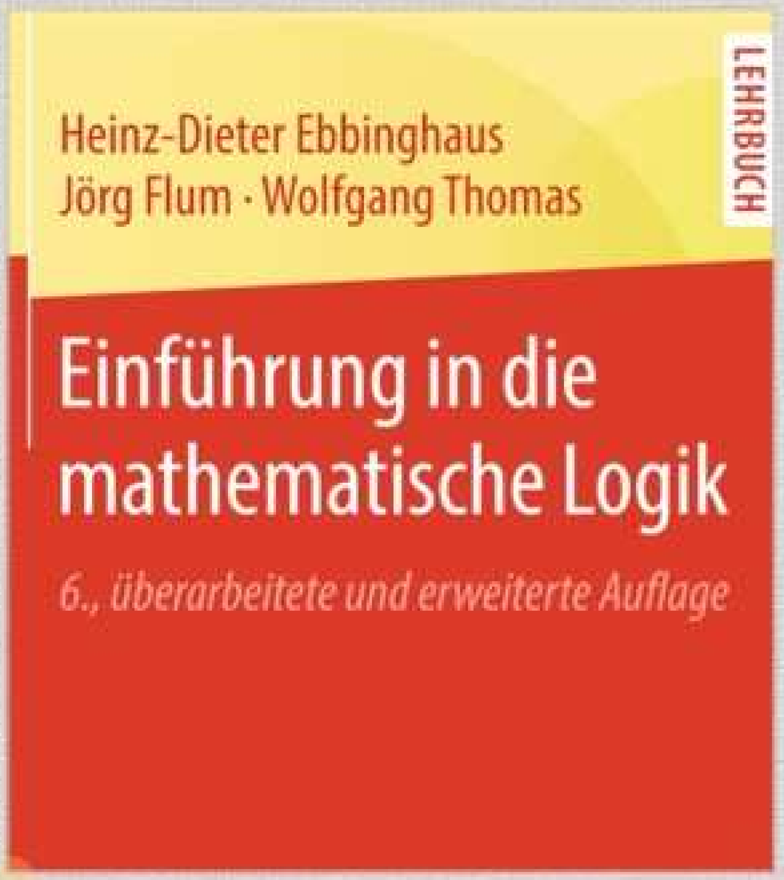
MLML

SOMMERSEMESTER 2021

VORLESUNG I

8. APRIL 2021

BENEDIKT LÖWE
TIM SEIFERT
LUCAS WANSNER



ELEKTRONISCH IN DER BIBLIOTHEK VERFÜGBAR

MIT GENEHMIGUNG DES VERLAGS AUF MOODLE :
NUR FÜR DIE VERWENDUNG IN DER VORLESUNG

Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2021
Prof. Dr. Benedikt Löwe, Tim Seifert, Lucas Wansner
Übungsblatt 1

Abgabe der Hausaufgaben am 20. April 2020 bis 10 Uhr (s.t.) über das Moodle

`https://lernen.min.uni-hamburg.de/course/view.php?id=1245` .

Es gibt drei Typen von wöchentlichen Aufgaben:

1. die *Präsentationsaufgaben*, welche in der Übungsgruppe präsentiert werden, aber nicht schriftlich abgegeben werden;
2. die *Gruppenaufgaben*, welche in der Übungsgruppe in kleinen Gruppen (zwei bis drei Studierende) bearbeitet werden;
3. die *Hausaufgaben*, welche schriftlich bearbeitet und abgegeben werden.

Die ersten 15 bis 20 Minuten der Übungsgruppe sind der Vorstellung der *Präsentationsaufgabe* gewidmet. Sie können Ihre Aufgabenlösung entweder alleine oder als Zweiergruppe präsentieren. Teil der Aufgabe ist es, sich zu überlegen, wie man die Präsentation in der Zoom-Übungsgruppe am besten durchführen kann. Um die Zulassung für die Klausur zu erwerben, muß jede Teilnehmerin oder jeder Teilnehmer mindestens eine Präsentationsaufgabe vorgestellt haben.

Die *Gruppenarbeiten* setzen voraus, daß die Studierenden dem Stoff der Vorlesung gefolgt sind, erfordern aber ansonsten keine Vorbereitung. In der Zoom-Sitzung der Übungsgruppe werden Breakout-Räume erzeugt, in die sich die Kleingruppen zurückziehen, um an der Gruppenaufgabe zu arbeiten. Einer der Übungsgruppenleiter wird durch die Breakout-Räume gehen, um Fragen zu beantworten. Um die Zulassung für die Klausur zu erwerben, muß jede Teilnehmerin oder jeder Teilnehmer mindestens an der Hälfte der Gruppenarbeiten teilgenommen haben.

Die *Hausaufgaben* werden nicht korrigiert: jede bearbeitete Aufgabe (unabhängig davon, ob sie korrekt oder inkorrekt bearbeitet wurde) wird gezählt. Wir stellen korrekte studentische Lösungen über Moodle zur Verfügung, so daß Sie überprüfen können, ob Ihre Lösung korrekt war. Um die Zulassung für die Klausur zu erwerben, muß mindestens die Hälfte der Hausaufgaben bearbeitet werden.

Gruppe 1 Di 10-12	Gruppe 2 Di 14-16
Fischer, Fabian	Bannöhr, Leon
Foth, Johann	Barrio de Mendoza Vera, Nicole
Gerlach, Luca	Bungard, Malte
Hendricks, Omke	Dieckow, Niklas
Hofmann, Malte	Follmann, Miriam
Kerner, Artur	Heilig, Teresa
Kruse, Tom Christoff	Hopfmann, Axel
Lesmann. Thomas	Jevnewitsch, Sascha
Lüschen, Luca	Jiang, Qiqi
Mann, Julius	Lampert, Joshua
Meyer, Ben	Lorenz, Nicola
Nouri, Bonyad	Lu, Yunyue
Preußke, Christian	Meier, Ramona
Rehberg, Nikolaus	Moreno Molina, Ana Vidya
Reiche, Nikolai	Neubuch, Maja
Tschierse, Simon	Noori, Omer
Voß, Laura	Schmeckpeper, Dennis
	Stegemann, Jacob
	Turan, Can
	Weber, Magnus
	Wulff, Claas-Elias
	Zienert, Jarla-Malin

Falls Sie langfristig wechseln wollen,
schreiben Sie eine e-mail.

GRUNDLAGEN DER MATHEMATIK

Wie funktioniert mathematische Erkenntnis?

$$\Phi \xrightarrow[\text{WAHR}]{} \text{Beweis}$$

$$\Phi \xrightarrow[\text{FALSCH}]{} \text{Gegenbeispiel}$$

Außerhalb der Mathematik ...

Standardbeispiel: TWEETY

Alle Vögel können fliegen.
Tweety ist ein Vogel.

Also kann Tweety fliegen.

Tweety ist ein Pinguin.

... reicht ein Gegenspiel oft nicht aus, um eine Allaussage zu widerlegen.
... reicht ein Beweis manchmal nicht aus, um eine Aussage zu bewerten.

$$\Phi \xrightarrow{\text{WAHR}} \text{Beweis}$$

$$\Phi \xrightarrow{\text{FALSCH}} \text{Gegenbeispiel}$$

Man beachte, daß "es gibt einen Beweis" nicht offensichtlich äquivalent ist zu "es gibt kein Gegenbeispiel".

Auch wichtig in der Mathematik:

DEFINITION

In der Mathematik haben Begriffe präzise Definitionen.

$$\Phi \Longrightarrow \Psi.$$

Φ ist eine hinreichende Bedingung für Ψ

Ψ ist eine notwendige Bedingung für Φ

Mathematische Definitionen bieten hinreichende und notwendige Bedingungen.

Außerhalb der Mathematik haben wir sogenannte

CLUSTERBEGRIFFE

Diese haben Listen von Kriterien, die weder hinreichend noch notwendig sind.

Wir sind in der Mathematik meist ungenau beim Definieren:

Bsp. Eine Struktur (P, R) heißt partielle Ordnung, falls

wir meinen hier GENAU DANN, WENN

1. P eine Menge ist
2. $R \subseteq P \times P$
3. R ist reflexiv
4. R ist transitiv
5. R ist antisymmetrisch.

Was sind die Konsequenzen dieser Präzisierung?

Eine Definition, welche nur hinreichende Kriterien gibt, kann mathematisch genutzt werden, um zu zeigen, daß etwas die Def. erfüllt.

Um zu zeigen, daß etwas die Def. <u>NICHT</u> erfüllt, brauchen Sie eine Def. mit notw. [+ hinreichenden] Bedingungen.

⟶ "BEWEIS"

- Wenn Sie positive Aussagen beweisen wollen, so ist ein informeller Beweisbegriff mit hinreichenden Kriterien völlig ausreichend.
- Wenn Sie die Unmöglichkeit des Beweises zeigen wollen, so brauchen Sie eine präzise Def. des Beweisbegriffs.

Genau dies ist die Aufgabe der math. Logik:

FORMEL, AUSSAGE, WAHR, GÜLTIG, FALSCH, BEWEIS, BEWEISBAR

METAMATHEMATIK

KAPITEL 2

Syntax der Sprachen erster Stufe

2.1 Alphabete

Unter einem *Alphabet* $\mathbb{A}$ verstehen wir eine nicht-leere Menge von *Zeichen* (*Symbolen*). Alphabete sind etwa $\mathbb{A}_1 = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, $\mathbb{A}_2 = \{a, b, c, \ldots, y, z\}$ (das Alphabet der kleinen lateinischen Buchstaben), $\mathbb{A}_3 = \{\circ, \int, a, d, x, f,), (\}$ und $\mathbb{A}_4 = \{c_0, c_1, c_2, \ldots\}$.

Endliche lineare Reihen von Zeichen eines Alphabets $\mathbb{A}$ nennen wir *Zeichenreihen* oder *Wörter* über $\mathbb{A}$. $\mathbb{A}^*$ bezeichne die Menge der Zeichenreihen über $\mathbb{A}$. Die Anzahl der in einer Zeichenreihe $\zeta \in \mathbb{A}^*$ vorkommenden Symbole heißt die *Länge von* ζ; dabei werden mehrfach vorkommende Symbole auch mehrfach gezählt. Die leere Zeichenreihe, d.h. die Zeichenreihe, die keine Symbole enthält, wird ebenfalls als ein Wort über $\mathbb{A}$ aufgefasst. Wir bezeichnen sie mit $\square$. Die Länge von $\square$ ist null.

c_0

$\mathbb{A} = \{$  $\}$

$\mathbb{A}_1$ 012 221 37853

$\mathbb{A}_2$ abcd mathematik

$\mathbb{A}_3$ $\int\circ\int(x)$ $((\int\int\circ$

$\mathbb{A}_4$

$\mathbb{A} = \{$Adam, Eva, $\emptyset\}$

$\mathbb{A}_* = \{ad, ada, m, a\}$

ada m ada m

~~Zeichenreihe~~
~~Zeichenkette~~
Symbolkette
Wort

Synonym

Länge von aaa ist 3.

Die Größe der Menge der Wörter.

Lemma 2.1.2

Falls A höchstens abzählbar ist, so ist A^* höchstens abzählbar.

"abzählbar"

X höchstens abzählbar, falls es eine Injektion von X nach $\mathbb{N}$ gibt

[$\Longleftrightarrow$ es gibt eine Surjektion von $\mathbb{N}$ nach X]

EFT Lemma 2.1.1

"abzählbar unendlich"

[es ex. eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und X]

abzählbar

Beweis Wir wollen eine Injektion

$$i : A^* \longrightarrow \mathbb{N}.$$

Wir haben eine Injektion $j : A \longrightarrow \mathbb{N}$.

ξ Zeichenreihe über A.

Fall 1 $\xi = \square$. Setze $i(\xi) := 0$.

Fall 2 $\xi = a_1 \cdots a_n$ für $n \geq 1$ und $a_1, \ldots, a_n \in A$.

$$i(\xi) := p_1^{j(a_1)+1} \cdot \ldots \cdot p_n^{j(a_n)+1}$$

wobei p_i die i-te Primzahl ist.

$$i(a_1 \dots a_n) = p_1^{j(a_1)+1} \cdot \ldots \cdot p_n^{j(a_n)+1} .$$

aba baa

Beh. i ist injektiv.

Ang. $i(\xi) = i(\xi')$.

Falls $i(\xi) = i(\xi') = 0 \Longrightarrow \xi = \xi' = \square$.

Falls $i(\xi) = i(\xi') \neq 0$, dann schreiben wir $\xi = a_1 \dots a_n$ $\xi' = a'_1 \dots a'_m$.

$$\longrightarrow p_1^{j(a_1)+1} \cdot \ldots \cdot p_n^{j(a_n)+1} = p_1^{j(a'_1)+1} \cdot \ldots \cdot p_m^{j(a'_m)+1}$$

Nach der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung ist also

$$j(a_i) = j(a'_i)$$

und

$$n = m$$

also wegen der Injektivität von j $a_i = a'_i$ und somit $\xi = \xi'$.

$$\boxed{2^{j(a)+1} \cdot 3^{j(b)+1} \cdot 5^{j(a)+1} = 2^{j(b)+1} \cdot 3^{j(a)+1} \cdot 5^{j(a)+1}}$$

q.e.d.