Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2021
Prof. Dr. Benedikt Löwe, Tim Seifert, Lucas Wansner
Übungsblatt 9

Abgabe der Hausaufgaben am 15. Juni 2021 bis 10 Uhr (s.t.) über das Moodle

`https://lernen.min.uni-hamburg.de/course/view.php?id=1245` .

Gruppenaufgabe G9 (wird in der Übung am 8. Juni 2021 bearbeitet).

(G9.1) Wir erinnern uns wiederum an die Definition der Summenordnung aus Gruppenaufgabe **G8** und Präsentationsaufgabe **P8**: Wir definieren rekursiv für $n \in \mathbb{N}$

$$\mathfrak{W}_1 := (\mathbb{N}, <) \text{ und}$$
$$\mathfrak{W}_{n+1} := \mathfrak{W}_n \oplus (\mathbb{N}, <).$$

Erinnern Sie sich daran, daß diese Ordnungen allesamt Wohlordnungen sind und warum.

(G9.2) Wir wollen die Relationen $\prec$ und $\preccurlyeq$ aus der Vorlesung etwas genauer ansehen. Erinnern Sie sich an die Definitionen dieser beiden Relationen:

$$\mathfrak{W} \preccurlyeq \mathfrak{W}' :\iff \mathfrak{W} \text{ ist isomorph zu einem Anfangsabschnitt von } \mathfrak{W}' \text{ und}$$
$$\mathfrak{W} \prec \mathfrak{W}' :\iff \mathfrak{W} \text{ ist isomorph zu einem echten Anfangsabschnitt von } \mathfrak{W}'.$$

Überlegen Sie sich, daß im allgemeinen *nicht* gilt: $\mathfrak{W} \preccurlyeq \mathfrak{W}'$ genau dann, wenn $\mathfrak{W} \prec \mathfrak{W}'$ oder $\mathfrak{W} = \mathfrak{W}'$.

[*Hinweis.* Diese Äquivalenz gilt nur *bis auf Isomorphie*. Wenn $\mathfrak{W} \neq \mathfrak{W}'$, aber $\mathfrak{W} \cong \mathfrak{W}'$, so gilt die rechte Seite nicht (warum?), aber die linke.]

(G9.3) Eine *Einbettung* von $\mathfrak{W}$ nach $\mathfrak{W}'$ war definiert als ordungserhaltende Injektion. Sei $(1, \in)$ die einelementige Wohlordnung mit Grundmenge $1 = \{0\}$. Zeigen Sie, daß es für jedes $i \geq 1$ unendlich viele verschiedene Einbettungen von $(1, \in)$ in $\mathfrak{W}_i$ gibt.

(G9.4) Zeigen Sie, daß das Bild jeder dieser Einbettungen in einem echten Anfangsabschnitt von $\mathfrak{W}_i$ enthalten ist.

(G9.5) Für wie viele dieser Einbettungen ist das Bild ein Anfangsabschnitt von $\mathfrak{W}_i$?

[*Hinweis.* In (G9.4) wird gefragt, ob das Bild in einem Anfangsabschnitt enthalten ist; hier wird gefragt, ob das Bild ein Anfangsabschnitt *ist*.]

(G9.6) Verallgemeinern Sie die Konstruktion aus (G9.3) bis (G9.5) und zeigen Sie, daß es für beliebige $n, i \in \mathbb{N}$ genau eine Einbettung von $(n, \in)$ nach $\mathfrak{W}_i$ gibt, deren Bild ein Anfangsabschnitt ist, aber unendlich viele verschiedene andere Einbettungen, deren Bilder allesamt in echten Anfangsabschnitten von $\mathfrak{W}_i$ enthalten sind.

(G9.7) Betrachten Sie $\mathfrak{W}_1$ und $\mathfrak{W}_2$. Wie in Gruppenaufgabe **G8** wollen wir die Grundmenge von $\mathfrak{W}_2$ als $\mathbb{N} \cup \widehat{\mathbb{N}}$ schreiben, wobei $\mathbb{N}$ und $\widehat{\mathbb{N}}$ disjunkt sind und die Elemente von $\widehat{N}$ alle oberhalb der Elemente von $\mathbb{N}$ liegen. Betrachten Sie die Abbildung

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \widehat{\mathbb{N}} : n \mapsto \widehat{n}$$

und überprüfen Sie, daß dies eine Einbettung von $\mathfrak{W}_1$ nach $\mathfrak{W}_2$ ist.

(G9.8) Überprüfen Sie, daß das Bild der Einbettung f nicht in einem echten Anfangsabschnitt von $\mathfrak{W}_2$ enthalten ist. Das Bild von f ist allerdings isomorph zu einem echten Anfangsabschnitt von $\mathfrak{W}_2$; zu welchem? Geben Sie den Isomorphismus konkret an.

(G9.9) Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ und $\chi_A : \mathbb{N} \to 2$ die *charakteristische Funktion* von A (also $\chi_A(n) = 1$ genau dann, wenn $n \in A$). Definieren Sie rekursiv eine Funktion $f_A := \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$f_A(0) := 0 \text{ und}$$
$$f_A(n+1) := f_A(n) + \chi_A(n) + 1.$$

Zeigen Sie, daß f_A eine Einbettung von $\mathfrak{W}_1$ nach $\mathfrak{W}_1$ ist und daß für $A \neq B$ gilt, daß $f_A \neq f_B$.

(G9.10) Schließen Sie aus (G9.9), daß es für $i \leq j$ überabzählbar viele verschiedene Einbettungen von $\mathfrak{W}_i$ nach $\mathfrak{W}_j$ gibt.

(G9.11) In der Vorlesung hatten wir gesehen, daß $\mathfrak{W} \prec \mathfrak{W}'$ äquivalent ist zu "es gibt eine Einbettung von $\mathfrak{W}$ nach $\mathfrak{W}'$ und $\mathfrak{W} \ncong \mathfrak{W}'$". Wir hatten bemerkt, daß die Bedingung "es gibt eine Einbettung von $\mathfrak{W}$ nach $\mathfrak{W}'$, welche kein Isomorphismus ist" nicht für diese Äquivalenz ausreicht. Machen Sie sich klar, daß (G9.9) (überabzählbar) viele Beispiele für diese Bemerkung liefert.

Präsentationsaufgabe P9 (wird in der Übung am 15. Juni 2021 präsentiert). Erinnern Sie sich an das Axiom der Zermelo-Unendlichkeit ZInf (Gruppenaufgabe **G7**). In dieser Aufgabe arbeiten wir in der Theorie $\mathsf{Z} + \text{Ers}$.

(P9.1) Beweisen Sie das Axiom der Zermelo-Unendlichkeit.

(P9.2) Beweisen Sie, daß es einen Isomorphismus zwischen den Strukturen $(\mathbb{N}, 0, \mathrm{S})$ und $(\mathbb{N}_{\text{Zermelo}}, 0, \mathrm{S}_{\text{Zermelo}})$ gibt, wobei $\mathrm{S}_{\text{Zermelo}}(x) := \{x\}$.

Hausaufgaben H9 (werden bis zum 15. Juni 2021 via Moodle abgegeben).

(H9.1) Sei κ eine Ordinalzahl. Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Es gibt kein $\alpha < \kappa$, so daß eine Bijektion zwischen α und κ existiert.

(ii) Es gibt kein $\alpha < \kappa$, so daß eine Injektion von κ nach α existiert.

(iii) Es gibt kein $\alpha < \kappa$, so daß eine Surjektion von α nach κ existiert.

(H9.2) Lösen Sie Aufgaben VI.2.11.7, VI.2.11.8 und VI.3.4.1 aus dem Buch von Ebbinghaus (arbeiten Sie in der Theorie $\mathsf{Z} + \mathrm{Ers}$):

2.11.7 Jede Limeszahl ist Supremum einer Menge von Nachfolgerzahlen.

2.11.8 Es gibt eine Limeszahl δ, die das Supremum einer Menge von Limeszahlen $< \delta$ ist.

3.4.1 Die Limeszahlen bilden keine Menge.

(H9.3) Wir wollen eine Ordinalzahl α *beschränkt rational* nennen, falls es rationale Zahlen q und q^* gibt, so daß es eine ordnungserhaltende Einbettung von $(\alpha, \in)$ in das Intervall $(q, q^*) \cap \mathbb{Q}$ gibt.

Zeigen Sie:

(i) Ist α beschränkt rational und $\beta \leq \alpha$, so ist β beschränkt rational.

(ii) Ist α beschränkt rational, so ist $\alpha + 1$ beschränkt rational.

(iii) Ist $\alpha = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$, wobei jedes α_n beschränkt rational ist, bezeugt durch eine Einbettung $f_n : \alpha_n \to \mathbb{Q}$, dann ist α beschränkt rational.

[*Zusatzfrage.* Überlegen Sie sich, wie man aus (ii) und (iii) zeigen kann, daß die beschränkt rationalen Ordinalzahlen genau die abzählbaren Ordinalzahlen sind. Das Argument ist subtiler, als es zunächst aussieht: darauf kommen wir zurück, wenn wir das Auswahlaxiom besprechen.]