Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2021
Prof. Dr. Benedikt Löwe, Tim Seifert, Lucas Wansner
Übungsblatt 8

Abgabe der Hausaufgaben am 8. Juni 2021 bis 10 Uhr (s.t.) über das Moodle

`https://lernen.min.uni-hamburg.de/course/view.php?id=1245` .

Gruppenaufgabe G8 (wird in der Übung am 1. Juni 2021 bearbeitet).

(G8.1) Erinnern Sie sich an die Beweise der Übungsaufgaben (H6.1) und (H6.2):

> (H6.1) Lösen Sie Aufgaben IV.1.20.6 & IV.2.15.3 aus dem Buch von Ebbinghaus:
>
> > **1.20.6** Sind a und b zueinander disjunkt und (a, r) und (b, s) Ordnungen i.S.v. $<$, so ist mit $t := r \cup s \cup (a \times b)$ auch $(a \cup b, t)$ eine Ordnung i.S.v. $<$, die *Summe* der Ordnungen (a, r) und (b, s).
>
> (H6.2) Formulieren Sie die folgende Aussage in der Sprache der Mengenlehre (mit in der Vorlesung definierten Abkürzungen wie z.B. $\varnothing$, $\cap$, Funk und Bild) und beweisen Sie sie in FST:
>
> > Je zwei Mengen können disjunkt gemacht werden; also: für Mengen x und y gibt es Mengen x' und y' mit $x' \cap y' = \varnothing$ und x und x' sowie y und y' sind jeweils in Bijektion zueinander.

Sind (a, r) und (b, s) Ordnungen i. S. v. $<$, so bezeichnen wir die so definierte *Summenordnung* als $(a, r) \oplus (b, s)$. Beachten Sie, daß im Falle, daß $a \cap b \neq \varnothing$ zunächst a und b mit Hilfe von (H6.2) disjunkt gemacht werden müssen. Überlegen Sie sich genau, wie die Ordnungen $(\mathbb{N}, <) \oplus (\mathbb{N}, <)$ und $(\mathbb{N}, <) \oplus (\mathbb{Z}, <)$ aussehen und zeichnen Sie sie.

(G8.2) In den Ordnungen $(\mathbb{N}, <) \oplus (\mathbb{N}, <)$ und $(\mathbb{N}, <) \oplus (\mathbb{Z}, <)$ schreiben wir im folgenden $\mathbb{N}$ für die erste Ordnung (mit Elementen n) und $\widehat{\mathbb{N}}$ bzw. $\widehat{\mathbb{Z}}$ für die von der ersten Ordnung disjunkte zweite Ordnung (mit Elementen $\widehat{z}$).

Überlegen Sie sich, daß es irrelevant ist, auf welche Art und Weise wir die Grundmengen disjunkt gemacht haben: für je zwei verschiedene Wahlen von disjunkten Grundmengen sind die entstehenden Ordnungen zueinander isomorph.

(G8.3) Auf $(\mathbb{N}, <) \oplus (\widehat{\mathbb{N}}, <)$ definieren Sie die *Nachfolgerfunktion*

$$\mathrm{S} : \begin{cases} n & \mapsto & n+1, \\ \widehat{n} & \mapsto & \widehat{n+1}. \end{cases}$$

Überlegen Sie sich, daß diese Funktion die Bedingungen (**P1**) und (**P2**) der Peano-Strukturen erfüllt, also, daß S eine injektive Funktion ist und daß $0 \notin \mathrm{Bild}(\mathrm{S})$.

(G8.4) Überlegen Sie sich, daß auch gilt, daß $\widehat{0} \notin \mathrm{Bild(S)}$. Die Zahl 0 ist also nicht das einzige Objekt, welches kein Nachfolger ist.

(G8.5) Definieren Sie nun auf $(\mathbb{N}, <) \oplus (\widehat{\mathbb{Z}}, <)$ die entsprechende *Nachfolgerfunktion*

$$\mathrm{S} : \begin{cases} n & \mapsto & n+1, \\ \widehat{z} & \mapsto & \widehat{z+1}. \end{cases}$$

Überlegen Sie sich, daß diese Funktion ebenfalls die Bedingungen (**P1**) und (**P2**) der Peano-Strukturen erfüllt und daß in diesem Falle die Zahl 0 wirklich der einzige Nicht-Nachfolger ist.

(G8.6) Betrachten Sie die Induktionsbedingung (**P3**):

$$(\mathbf{P3})\ \ \forall b\big(b \subseteq a \wedge \nu \in b \wedge \forall x(x \in b \rightarrow \sigma(x) \in b) \rightarrow b = a\big).$$

Vergewissern Sie sich, daß dies besagt: "Jede Teilmenge, welche die Null enthält und unter der Nachfolgeroperation abgeschlossen ist, ist die gesamte Struktur."

(G8.7) Zeigen Sie, daß keine der folgenden drei Strukturen eine Peano-Struktur ist:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_1 &:= (\mathbb{N} \cup \widehat{\mathbb{N}}, \mathrm{S}, 0), \\ \mathfrak{P}_2 &:= (\mathbb{N} \cup \widehat{\mathbb{N}}, \mathrm{S}, \widehat{0}) \text{ und} \\ \mathfrak{P}_3 &:= (\mathbb{N} \cup \widehat{\mathbb{Z}}, \mathrm{S}, 0). \end{aligned}$$

(G8.8) Sei $(L, <)$ eine Ordnung i. S. v. $<$ mit kleinstem Element $0 \in L$. Wir nennen eine Teilmenge $Z \subseteq L$ *ordnungsinduktiv*, wenn sie die folgende Eigenschaft hat: für jedes $x \in L$, falls $\{y \in L\,;\, y < x\} \subseteq Z$, so gilt $x \in Z$. Überlegen Sie sich, daß $\varnothing$ nicht ordnungsinduktiv sein kann und daß L ordnungsinduktiv ist.

(G8.9) Wir sagen, daß $(L, <, 0)$ das *Prinzip der Ordnungsinduktion* erfüllt, falls L die einzige ordnungsinduktive Teilmenge von L ist. Überlegen Sie sich, daß $\mathfrak{P}_1$ mit der Summenordnung das Prinzip der Ordnungsinduktion erfüllt.

(G8.10) Überlegen Sie sich, daß $\mathfrak{P}_3$ mit der Summenordnung nicht das Prinzip der Ordnungsinduktion erfüllt.

Präsentationsaufgabe P8 (wird in der Übung am 8. Juni 2021 präsentiert). Wir verwenden die Konstruktion der Summenordnung aus (G8.1). Zeigen Sie: $(A, <) \oplus (B, <)$ ist genau dann eine Wohlordnung, wenn sowohl $(A, <)$ als auch $(B, <)$ Wohlordnungen sind.

[*Verallgemeinerung.* Schauen Sie sich (H6.1) nochmals an, insbesondere Aufgabe IV.2.15.3 aus dem Buch von Ebbinghaus. Dies erlaubt die Definition der Summe einer (geordneten) Menge von Ordnungen. Überlegen Sie sich, wie man die Aussage von **P8** auf diesen Kontext verallgemeinern kann.]

Hausaufgaben H8 (werden bis zum 8. Juni 2021 via Moodle abgegeben).

(H8.1) Zeigen Sie mit Hilfe von Induktion das (Links-)Distributivgesetz auf den natürlichen Zahlen:
$$n \cdot (m + k) = n \cdot m + n \cdot k.$$

Versuchen Sie mit dem gleichen Beweis das (Rechts-)Distributivgesetz, also
$$(n + m) \cdot k = n \cdot k + m \cdot k,$$
zu beweisen: an welcher Stelle hakt der Beweis? Welche zusätzliche Eigenschaft der arithmetischen Operationen auf $\mathbb{N}$ brauchen Sie, um diesen Beweis zu vervollständigen?

(H8.2) Sei $\mathfrak{W} := (W, <)$ eine Wohlordnung und Z eine beliebige Menge. Sei $G(\mathfrak{W}, Z)$ die Menge aller Funktionen g mit $\mathrm{Bild}(g) \subseteq Z$, so daß $\mathrm{Def}(g)$ ein echtes Anfangsstück von $\mathfrak{W}$ ist. (Warum ist dies eine Menge?) Sei $F : G(\mathfrak{W}, Z) \to Z$ eine beliebige Funktion.

Beweisen Sie die folgende Version des *Rekursionstheorems*: Es gibt eine eindeutig bestimmte Funktion $H : W \to Z$, so daß für alle $w \in W$ gilt, daß
$$H(w) = F(H{\restriction}{<}[w]).$$

(H8.3) Lösen Sie Aufgabe VI.1.10.4 aus dem Buch von Ebbinghaus:

> **1.10.4** Es sei (a, r) eine Wohlordnung und A die Menge der von a verschiedenen Anfangsstücke von a bzgl. r. Dann ist $(a, r) \cong (A, \subset_A)$. Gilt dies auch für beliebige Ordnungen i.S.v. $<$?