Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2021
Prof. Dr. Benedikt Löwe, Tim Seifert, Lucas Wansner
Übungsblatt 7

Abgabe der Hausaufgaben am 1. Juni 2021 bis 10 Uhr (s.t.) über das Moodle

`https://lernen.min.uni-hamburg.de/course/view.php?id=1245` .

Gruppenaufgabe G7 (wird in der Übung am 25. Mai 2021 bearbeitet). Wir sehen uns nochmals den Beweis des Rekursionstheorems in der Zermelo-Mengenlehre Z an. Zur Erinnerung, Z besteht aus Ext, Pot, $\cup$-Ax, $\bigcup$-Ax, Aus und Inf. In dieser gesamten Aufgabe arbeiten Sie in Z.

(G7.1) Erinnern Sie sich an den Beweis des Rekursionstheorems aus Vorlesung XII:

> Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion und $n_0 \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit
>
> $$F(\varnothing) = n_0 \text{ und}$$
> $$F(\mathrm{S}(n)) = f(F(n)) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere erinnern Sie sich an den Begriff des *Keims* und die zwei wesentlichen Lemmas über Keime, die wir mit dem Prinzip der vollständigen Induktion bewiesen hatten:

(a) Je zwei Keime stimmen auf ihrem Definitionsbereich überein.

(b) Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt es einen Keim g, so daß $n \in \mathrm{Def}(g)$.

Erinnern Sie sich auch daran, wie man nun die Funktion unter Verwendung von Aus aus $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ aussondert.

(G7.2) Verallgemeinern Sie dieses Rekursionstheorem zum folgenden Satz:

> Sei Z eine beliebige Menge, $f : Z \to Z$ eine Funktion und $z_0 \in Z$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion $F : \mathbb{N} \to Z$ mit
>
> $$F(\varnothing) = z_0 \text{ und}$$
> $$F(\mathrm{S}(n)) = f(F(n)) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Welche Begriffe, Lemmas und Beweise aus (G7.1) müssen in welcher Form abgewandelt werden?

(G7.3) In Gruppenaufgabe **G4** hatten wir die natürlichen Zahlen als Graphenmodell $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, <)$ betrachtet, in dem Ext, Pot, $\cup$-Ax, und $\bigcup$-Ax gelten. In diesem Modell gílt die starke Version des Paarmengenaxioms nicht. Überlegen Sie sich, daß in diesem Modell trotzdem die Nachfolgeroperation $\mathrm{S}(x) := x \cup \{x\}$ eindeutig definiert ist, also die folgende Formel gilt:

$$\forall x \exists s \forall z (z \in s \leftrightarrow (z \in x \vee z \equiv x)).$$

(G7.4) Wir erweitern das Modell $\mathfrak{A}$ aus (G7.3) zu einem Modell $\mathfrak{A}^* = (\mathbb{N} \cup \{\omega\}, E)$ durch Erweiterung um einen neuen Knoten ω, bei dem für $n, m \in \mathbb{N}$ gilt, daß $n \, E \, m$ genau dann, wenn $n < m$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, daß $n \, E \, \omega$.

Überprüfen Sie, welche der Axiome Ext, Pot, $\cup$-Ax, $\bigcup$-Ax und stPaar in $\mathfrak{A}^*$ gelten.

(G7.5) Zeigen Sie, daß ω in $\mathfrak{A}^*$ eine induktive Menge ist und somit $\mathfrak{A}^* \models \mathsf{Inf}$.

[*Hinweis.* Offiziell hatten wir Inf nur im Kontext von FST definiert. Machen Sie sich klar, daß dies wegen (G7.3) kein Problem ist.]

(G7.6) Erinnern Sie sich nun an den Begriff der Zermelo-induktiven Menge aus (H6.3): eine Menge I heißt *Zermelo-induktiv*, falls $\varnothing \in I$ und falls $x \in I$, so ist $\{x\} \in I$. Das *Axiom der Zermelo-Unendlichkeit* ZInf besagt

$$\exists I (\varnothing \in I \wedge \forall x (x \in I \rightarrow \{x\} \in I)).$$

Überlegen Sie sich, daß jede Zermelo-induktive Menge in $\mathfrak{A}^*$ die Zahl 1 enthalten muß, daß aber in $\mathfrak{A}^*$ keine Einermenge existiert, die genau die Zahl 1 enthält. Daher kann ZInf in $\mathfrak{A}^*$ nicht gelten.

(G7.7) Das Argument in (G7.6) verwendet die Tatsache, daß in $\mathfrak{A}^*$ die entsprechenden Einermengen nicht existieren. Überlegen Sie sich, wie man $\mathfrak{A}^*$ zu einem Modell erweitern kann, in dem alle relevanten Mengen existieren, aber immer noch keine Zermelo-induktive Menge existiert.

[*Zusatzüberlegung.* Können Sie mit Hilfe der Konstruktion aus **G5** das Modell $\mathfrak{A}^*$ zu einem Modell von $\mathsf{Ext} + \mathsf{stPaar} + \mathsf{Inf} + \neg\mathsf{ZInf}$ erweitern?]

(G7.8) Arbeiten Sie nun in der Theorie $\mathsf{Z} + \mathsf{ZInf}$. Die entsprechenden Mengen natürlicher Zahlen wollen wir als $\mathbb{N}$ (die kleinste induktive Menge) und $\mathbb{N}_{\mathrm{Zermelo}}$ bezeichnen. Beweisen Sie unter Verwendung des Rekursionssatzes aus (G7.2), daß eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_{\mathrm{Zermelo}}$ existiert.

[*Zusatzüberlegung.* Diese Abbildung ist sogar ein Isomorphismus zwischen den Strukturen $(\mathbb{N}, <)$ und $(\mathbb{N}_{\mathrm{Zermelo}}, <)$. Wie muß man dafür $<$ auf den beiden Mengen definieren? Wie zeigt man, daß die Abbildung ein Isomorphismus ist?]

Präsentationsaufgabe P7 (wird in der Übung am 1. Juni 2021 präsentiert). Lösen Sie Aufgabe V.2.4.5 aus dem Buch von Ebbinghaus:

> **2.5.4** Es sei $a \subseteq \omega$ und $\forall i \; a \backslash i \neq \emptyset$. Dann existiert eine Funktion f mit $f : \omega \overset{bij}{\to} a$.

Hausaufgaben H7 (werden bis zum 1. Juni 2021 via Moodle abgegeben).

(H7.1) Zeigen Sie in der Zermelo-Mengenlehre Z durch Induktion, daß

(a) für je zwei natürliche Zahlen n und m eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl k existiert, so daß k in Bijektion zur disjunkten Vereinigung von n und m ist (vgl. (H6.2) für das Disjunktmachen zweier Mengen);

(b) für je zwei natürliche Zahlen n und m eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl k existiert, so daß k in Bijektion zu $n \times m$ ist.

(H7.2) Bezeichnen Sie die in (H7.1) beschriebenen Operationen als $n \boxplus m$ and $n \boxtimes m$ und zeigen Sie in der Zermelo-Mengenlehre Z durch Induktion, daß für alle n und m gilt:

$$n + m = n \boxplus m \text{ und}$$
$$n \cdot m = n \boxtimes m.$$

(H7.3) Sei $\mathfrak{X} := (X, <)$ eine strikte lineare Ordnung. Eine Menge $L \subseteq X$ heißt *Anfangsstück (von $\mathfrak{X}$)*, wenn für alle $\ell \in L$ gilt, daß $<[\ell] \subseteq L$; eine Menge $R \subseteq X$ heißt *Endstück (von $\mathfrak{X}$)*, wenn für alle $r \in R$, daß $>[r] \subseteq R$. Ein Anfangs- oder Endstück S heißt *echt*, falls $S \neq X$. Eine Teilmenge Z von X heißt *(nach oben) beschränkt*, wenn es ein $b \in X$ gibt, so daß für alle $z \in Z$ gilt, daß $z \leq b$.

Wir nennen ein Paar (L, R) einen *Dedekind-Schnitt (über $\mathfrak{X}$)*, wenn $L \cup R = X$, $L \cap R = \varnothing$, L ein echtes Anfangsstück und R ein echtes Endstück ist. Ein Dedekind-Schnitt (L, R) heißt *adäquat*, falls L kein größtes Element hat.

Sind (L, R) und (L', R') Dedekind-Schnitte, so setzen wir $(L, R) < (L', R')$, falls $L \subsetneqq L'$. Sei $\mathrm{Ded}(\mathfrak{X})$ die Menge aller adäquaten Dedekind-Schnitte über $(X, <)$.

(a) Zeigen Sie, daß $(\mathrm{Ded}(\mathfrak{X}), <)$ eine strikte totale Ordnung ist, in der jede nichtleere (nach oben) beschränkte Teilmenge eine kleinste obere Schranke hat.

(b) Welchen Anforderungen muß $\mathfrak{X}$ genügen, damit die Abbildung

$$x \mapsto (\{y \in X \,;\, y < x\}, \{y \in X \,;\, x \leq y\})$$

eine ordnungserhaltende Einbettung von $\mathfrak{X}$ nach $(\mathrm{Ded}(\mathfrak{X}), <)$ ist?

(c) Was geschieht, wenn wir die Bedingung der Adäquatheit in der Definition von $\mathrm{Ded}(\mathfrak{X})$ weglassen?