Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2021
Prof. Dr. Benedikt Löwe, Tim Seifert, Lucas Wansner
Übungsblatt 6

Abgabe der Hausaufgaben am 25. Mai 2021 bis 10 Uhr (s.t.) über das Moodle

`https://lernen.min.uni-hamburg.de/course/view.php?id=1245` .

Gruppenaufgabe G6 (wird in der Übung am 18. Mai 2021 bearbeitet). In dieser Aufgabe wollen wir besser verstehen, wie Mathematik in Modellen von FST repräsentiert ist. Hierfür wollen wir das in Vorlesung XI konstruierte Modell von FST betrachten. Wir erinnern uns, daß für eine Menge x in diesem Modell das *Geburtsdatum* $\mathrm{GD}(x)$ dieser Menge der Index derjenigen Stufe, in der die Menge konstruiert wurde, ist. Wir verwenden die in FST erlaubten und üblichen Notationen für Mengen: z.B. schreiben wir $\{x\}$ für "die eindeutig bestimmte Zahl k, so daß $\mathrm{Ext}_E(k) = \{x\}$".

(G6.1) Erinnern Sie sich an die in der Vorlesung diskutierten Eigenschaften des Geburtsdatums

$$\text{Falls } n\,E\,m, \text{ so gilt } \mathrm{GD}(n) < \mathrm{GD}(m). \tag{*}$$

$$\mathrm{GD}(x) = \max\{\mathrm{GD}(y)\,;\, y \in \mathrm{Ext}_E(x)\} + 1. \tag{**}$$

(stellen Sie sicher, daß Sie verstehen, *warum* (*) und (**) gelten) und überlegen Sie sich, daß

$$\mathrm{GD}(\{x\}) = \mathrm{GD}(x) + 1 \text{ und}$$
$$\mathrm{GD}(\{x,y\}) = \max(\mathrm{GD}(x), \mathrm{GD}(y)) + 1.$$

(G6.2) Falls $\mathrm{GD}(x) = n$ und $\mathrm{GD}(y) = m$, was ist $\mathrm{GD}((x,y))$? Erinnern Sie sich dafür, daß $(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\}$).

(G6.3) Falls $\mathrm{GD}(x) = n$ und $\mathrm{GD}(y) = m$, was ist $\mathrm{GD}(x \times y)$?

(G6.4) Angenommen $\mathrm{GD}(x) = n$, $\mathrm{GD}(y) = m$ und $f : x \to y$. Geben Sie untere und obere Schranken für $\mathrm{GD}(f)$ an. Geben Sie Beispiele für n und m, so daß $\mathrm{GD}(f)$ mit den o.g. Angaben nicht eindeutig bestimmt werden kann.

(G6.5) Sei $\mathrm{GD}(x) = n$ und $f : x \times x \to x$. Verwenden Sie (G6.4), um $\mathrm{GD}(f)$ eindeutig zu bestimmen.

(G6.6) Erinnern Sie sich an unsere mengentheoretische Konstruktion einer Gruppe $\mathfrak{G} := (G, \mathfrak{a})$ in FST, wobei G eine Menge war und $\mathfrak{a}$ eine Funktion mit $\mathrm{Def}(\mathfrak{a}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, wobei $\mathfrak{a}(\varnothing) \in G$ und $\mathfrak{a}(\{\varnothing\}) : G \times G \to G$. Berechnen Sie $\mathrm{GD}(\mathfrak{G})$ mit Hilfe von (G6.5) unter der Annahme, daß $\mathrm{GD}(G) = n$.

(G6.7) Überlegen Sie sich, daß man die folgende gruppentheoretische Aussage in der Sprache der Mengenlehre formulieren kann und zeigen Sie sie in FST:

Je zwei Gruppen mit zwei Elementen sind isomorph zueinander.

[Was genau muß man eigentlich überhaupt zeigen, um diese Aussage in FST zu beweisen?]

(G6.8) Wir wollen eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{N} = A$ als $\mathfrak{A}$-*Klasse* bezeichnen. Falls X eine $\mathfrak{A}$-Klasse ist und $n \in \mathbb{N}$, so sagen wir, daß X *und* n *koextensional sind*, falls $X = \mathrm{Ext}_E(n)$. Eine $\mathfrak{A}$-Klasse X heißt *echt*, falls es keine Zahl n gibt, zu der X koextensional ist. Zeigen Sie, daß eine $\mathfrak{A}$-Klasse genau dann echt ist, wenn die in ihr auftretenden Geburtsdaten unbeschränkt sind.

(G6.9) Verwenden Sie (G6.8), um in diesem konkreten Beispiel des FST-Modells $\mathfrak{A}$ zu sehen, daß es keine Menge aller Gruppen in $\mathfrak{A}$ geben kann.

[*Hinweis.* In der Vorlesung hatten wir dies allgemein für FST-Modelle unter Verwendung der großen Vereinigung gesehen, aber in diesem Falle kann man es ganz direkt unter Verwendung von (G6.8) sehen.]

Präsentationsaufgabe P6 (wird in der Übung am 25. Mai 2021 präsentiert).

Eine Menge X heißt *endlich*, falls sie in Bijektion zu einer natürlichen Zahl ist; sie heißt *unendlich*, falls sie nicht endlich ist; sie heißt *Dedekind-unendlich*, falls sie eine echte Teilmenge $Y \subsetneq X$ hat, die in Bijektion mit X steht. Zeigen Sie:

(a) Jede Dedekind-unendliche Menge ist unendlich.

(b) Falls eine Injektion $f : \mathbb{N} \to X$ existiert, so ist X Dedekind-unendlich.

Hausaufgaben H6 (werden bis zum 25. Mai 2021 via Moodle abgegeben).

(H6.1) Lösen Sie Aufgaben IV.1.20.6 & IV.2.15.3 aus dem Buch von Ebbinghaus:

1.20.6 Sind a und b zueinander disjunkt und (a, r) und (b, s) Ordnungen i.S.v. $<$, so ist mit $t := r \cup s \cup (a \times b)$ auch $(a \cup b, t)$ eine Ordnung i.S.v. $<$, die *Summe* der Ordnungen (a, r) und (b, s).

2.15.3 Es seien $(I, <)$ eine Ordnung i.S.v. $<$ mit $I \neq \emptyset$ und $(X_\iota)_{\iota \in I}$ eine Familie von Ordnungen i.S.v. $<$ mit zueinander disjunkten Trägermengen. Analog zu Aufgabe 1.20.6 definiere man die Summe der Ordnungen X_ι.

(H6.2) Formulieren Sie die folgende Aussage in der Sprache der Mengenlehre (mit in der Vorlesung definierten Abkürzungen wie z.B. $\varnothing$, $\cap$, Funk und Bild) und beweisen Sie sie in FST:

> Je zwei Mengen können disjunkt gemacht werden; also: für Mengen x und y gibt es Mengen x' und y' mit $x' \cap y' = \varnothing$ und x und x' sowie y und y' sind jeweils in Bijektion zueinander.

(H6.3) Eine Menge I hieß *induktiv*, falls $\varnothing \in I$ und für alle $x \in I$, ist auch $x \cup \{x\} \in I$.

Analog nennen wir eine Menge Z *Zermelo-induktiv* falls $\varnothing \in Z$ und für alle $x \in Z$, ist auch $\{x\} \in Z$. Zeigen Sie:

(a) Falls es eine Zermelo-induktive Menge gibt, so gibt es eine minimale Zermelo-induktive Menge.

(b) Wir bezeichnen die minimale Zermelo-induktive Menge aus (a) mit $\mathbb{N}_{\text{Zermelo}}$. Dann gilt $\bigcup \mathbb{N}_{\text{Zermelo}} = \mathbb{N}_{\text{Zermelo}}$.

(c) Falls $x \in \mathbb{N}_{\text{Zermelo}}$, so gilt $x \notin x$.