**Mathematische Logik & Mengenlehre**
Sommersemester 2021
Prof. Dr. Benedikt Löwe, Tim Seifert, Lucas Wansner
**Übungsblatt 5**

Abgabe der Hausaufgaben am 18. Mai 2021 bis 10 Uhr (s.t.) über das Moodle

`https://lernen.min.uni-hamburg.de/course/view.php?id=1245` .

**Gruppenaufgabe G5** (wird in der Übung am 11. Mai 2021 bearbeitet). Sei $S = S_{\mathrm{R}} = \{\in\}$ mit
$\sigma(\in) = 2$ die Symbolmenge der Sprache der Mengenlehre. Wir konstruieren einen gerichteten Graphen auf der Menge $A := \mathbb{N}$ per Rekursion. Sei $A_0 := \{0\}$ und $E_0 := \varnothing$. Wir setzen $\mathfrak{A}_0 := (A_0, E_0)$. Wir verwenden stPaar, das *starke Paarmengenaxiom*, also

$$\forall x \forall y \exists v \forall z (z \in v \leftrightarrow (z \equiv x \vee z \equiv y)).$$

(G5.1) Angenommen, $\mathfrak{A}_i := (A_i, E_i)$ ist bereits definiert und $A_i$ ist endlich mit $A_i = \{0, 1, ..., n_i\}$. Sei $Z := [A_i]^{\leq 2}$ die Menge der höchstens zweielementigen Teilmengen von $A_i$. Überlegen Sie sich, daß $Z$ endlich ist.

(G5.2) Mit den Definitionen von (G5.1) heiße ein Element $X \in Z$ *bedient*, falls es ein $b \in A_i$ gibt, so daß für alle $a \in A_i$ gilt:

$$a \in X \iff a\, E_i\, b.$$

Wir betrachten die endliche Menge $N_i := \{X \in Z\,;\, X \text{ ist nicht bedient}\}$ und schreiben $k_i := |N_i|$, sowie $N_i := \{X_1, ..., X_{k_i}\}$. Wir definieren nun $A_{i+1} := A_i \cup \{n_i + 1, ..., n_i + k_i\} = \{0, 1, ..., n_i + k_i\}$,

$$E_{i+1} := E_i \cup \{(a, b)\,;\, a \in X_j \text{ und } b = n_i + j \text{ für ein } j\}$$

und $\mathfrak{A}_{i+1} := (A_{i+1}, E_{i+1})$. Wir wollen die Elemente von $A_i$ *alte Knoten* nennen. Vergewissern Sie sich, daß falls $n\, E_{i+1}\, m$, dann

(a) ist $n$ ein alter Knoten und

(b) falls $m$ ein alter Knoten ist, so gilt $n\, E_i\, m$.

[*Hinweis.* Diese Definition definiert die Struktur $\mathfrak{A}_{i+1}$ nicht ganz eindeutig, da wir die Freiheit haben, die Reihenfolge zu wählen, in der wir die Elemente von $N_i$ abarbeiten. Überlegen Sie sich, wie Sie diese Ungenauigkeit beheben könnten.]

(G5.3) Zeichnen Sie die Strukturen $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_3$.

(G5.4) Zeigen Sie: falls $\mathfrak{A}_i \models \mathsf{Ext}$, so gilt, daß $\mathfrak{A}_{i+1} \models \mathsf{Ext}$.

(G5.5) Überlegen Sie sich, daß für ein festes $i \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathfrak{A}_i \models \mathsf{stPaar}$ genau dann, wenn alle Elemente von $Z$ in der Konstruktion von (G5.1) und (G5.2) bedient sind.

(G5.6) Ist es möglich, daß es ein $i \in \mathbb{N}$ gibt mit $A_i = A_{i+1}$? Folgern Sie daraus, daß $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = A = \mathbb{N}$. Definieren Sie $E := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i$ und $\mathfrak{A} := (A, E)$.

(G5.7) Zeigen Sie, daß $\mathfrak{A} \models \mathsf{Ext}$. Verwenden Sie (G5.2) & (G5.4).

[*Hinweis.* Überlegen Sie sich, warum (G5.4) alleine nicht ausreicht.]

(G5.8) Falls $\mathfrak{B}_0 = (B_0, E_0)$ und $\mathfrak{B}_1 := (B_1, E_1)$ zwei $S$-Strukturen sind, so sagen wir, daß $\mathfrak{B}_1$ eine *Enderweiterung* von $\mathfrak{B}_0$ ist, falls $\mathfrak{B}_0 \subseteq \mathfrak{B}_1$ (Substruktur) und für $a, b \in B_1$ gilt: falls $a \in B_0$ und $b \, E_1 \, a$, so ist $b \in B_0$.

Vergewissern Sie sich, daß für $i \leq j \in \mathbb{N}$ die Strukturen $\mathfrak{A}_j$ und $\mathfrak{A}$ Enderweiterungen von $\mathfrak{A}_i$ sind (vgl. (G5.2)).

(G5.9) Seien $\mathfrak{B}_0$ und $\mathfrak{B}_1$ zwei $S$-Strukturen, so daß $\mathfrak{B}_1$ eine Enderweiterung von $\mathfrak{B}_0$ ist und $\mathfrak{B}_0 \models \mathsf{Leer}$. Zeigen Sie, daß $\mathfrak{B}_1 \models \mathsf{Leer}$. Folgern Sie daraus, daß $\mathfrak{A} \models \mathsf{Leer}$.

(G5.10) Zeigen Sie, daß $\mathfrak{A} \models \mathsf{Paar}$.

(G5.11) Zeigen Sie (per Induktion), daß für alle $n \in A$ gilt, daß die $\mathfrak{A}$-Extension von $n$ höchstens zwei Elemente hat.

(G5.12) Sei $n$ so gewählt, daß die $\mathfrak{A}$-Extension von $n$ genau die Menge $\{0, 1\}$ ist. Was sind die $\mathfrak{A}$-Teilmengen von $n$?

(G5.13) Folgern Sie aus (G5.12), daß $\mathfrak{A} \not\models \mathsf{Pot}$.

(G5.14) Überlegen Sie sich, wie man aus (G5.11) leicht zeigen kann, daß $\mathfrak{A} \models \mathsf{Aus}$.

[*Hinweis.* Vermeiden Sie, über allgemeine Formeln $\Phi$ zu sprechen.]

**Präsentationsaufgabe P5** (wird in der Übung am 18. Mai 2021 präsentiert). Geben Sie einen (*echten!*) **LST**-Satz an, der in jedem Modell $\mathfrak{A} \models \mathsf{FST}$ die folgende Aussage ausdrückt:

> Zu je zwei Mengen $X$ und $Y$ gibt es die Menge aller surjektiven partiellen Funktionen von $X$ nach $Y$ (also Funktionen, die auf einer Teilmenge von $X$ definiert sind und deren Bild ganz $Y$ ist).

Dieser Satz soll in der Sprache **LST** ohne jegliche Abkürzungen formuliert sein, also mit keinem anderen nichtlogischen Symbol als $\in$.

[*Hinweis.* Es hilft, dies schrittweise zu machen: führen Sie erst Abkürzungen ein und lösen Sie diese dann nach und nach auf, bis nur noch die logischen Symbole und das Symbol $\in$ übrig sind.]

**Hausaufgaben H5** (werden bis zum 18. Mai 2021 via Moodle abgegeben).

(H5.1) Lösen Sie Aufgaben III.3.5.2 & III.3.5.3 aus dem Buch von Ebbinghaus:

> **3.5.2** Man gebe Mengen $x$ und $y$ an mit $\bigcup(x \cap y) \neq (\bigcup x) \cap (\bigcup y)$. Gibt es eine stets gültige Teilmengenbeziehung zwischen $\bigcup(x \cap y)$ und $(\bigcup x) \cap (\bigcup y)$?
>
> **3.5.3** Man zeige: $\forall x\, x \subseteq \mathrm{Pot}(\bigcup x)$. Kann Gleichheit eintreten? Kann Ungleichheit eintreten? Wie stehen $\bigcup \mathrm{Pot}(x)$ und $\mathrm{Pot}(\bigcup x)$ zueinander?

(H5.2) Lösen Sie Aufgabe III.2.3.3 aus dem Buch von Ebbinghaus (s.u.) und zeigen Sie außerdem, daß das Modell $\mathfrak{A} = (A, E)$ aus Gruppenaufgabe **G4** ein Modell von $\bigcup$-Ax und $\cup$-Ax ist.

*Zusatzüberlegung.* Wenn Sie die Konstruktion aus Gruppenaufgabe **G5** so modifizieren, daß Sie nicht in jedem Schritt die *zwei*elementigen Mengen, sondern stattdessen die *ein*elementigen Mengen hinzufügen, was gilt im resultierenden Modell für $\bigcup$-Ax und $\cup$-Ax? Welche Unabhängigkeitsaussagen kann man also mit dem resultierenden Modell erhalten?

> **2.3.3** Man zeige mit einem geeigneten „Universum“, daß $\bigcup$**-Ax** nicht aus **Ex**, **Ext**, **Aus** und $\cup$**-Ax** bewiesen werden kann.

(H5.3) Lösen Sie Aufgabe IV.1.20.1 aus dem Buch von Ebbinghaus:

> **1.20.1** Welche der zweistelligen Operationen (i) $x, y \mapsto \{\{\{x\}, \emptyset\}, \{\{y\}\}\}$, (ii) $x, y \mapsto \{\{x, \emptyset\}, \{y\}\}$, (iii) $x, y \mapsto \{x, x \cup y\}$ lassen sich zur Definition geordneter Paare verwenden?