Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2021
Prof. Dr. Benedikt Löwe, Tim Seifert, Lucas Wansner
Übungsblatt 4

Abgabe der Hausaufgaben am 11. Mai 2021 bis 10 Uhr (s.t.) über das Moodle

`https://lernen.min.uni-hamburg.de/course/view.php?id=1245` .

Gruppenaufgabe G4 (wird in der Übung am 4. Mai 2021 bearbeitet). Sei $A := \{x_i\,;\, i \in \mathbb{N}\}$ eine durch natürliche Zahlen indizierte Menge von Knoten und $\mathfrak{A} := (A, E)$ der (gerichtete) Graph, welcher durch

$$x_i \; E \; x_j : \Longleftrightarrow \; i < j$$

definiert ist. Sei $S = S_{\mathrm{R}} = \{\in\}$ mit $\sigma(\in) = 2$ die Symbolmenge der Sprache der Mengenlehre. Dann ist $\mathfrak{A}$ eine S-Struktur.

(G4.1) Zeichnen Sie den Teil des Graphen $\mathfrak{A}$ mit den Knoten x_0, x_1, x_2, x_3 und x_4 und repräsentieren Sie die Kantenrelation durch Pfeile, wie in der Vorlesung.

(G4.2) Ein Knoten $x_i \in A$ heiße *eine leere Menge in* $\mathfrak{A}$, falls

$$\mathfrak{A}\frac{x_i}{x} \models \forall z \neg z \in x.$$

Zeigen Sie, daß es genau eine leere Menge in $\mathfrak{A}$ gibt.

(G4.3) Überlegen Sie sich, wie Sie den Graphen $\mathfrak{A}$ modifizieren könnten, damit sie zwei verschiedene leere Mengen in dem resultierenden Graphen $\mathfrak{A}'$ zu erhalten.

(G4.4) Das *Axiom der leeren Menge* ist $\mathsf{Leer} := \exists x \forall z \neg z \in x$. Zeigen Sie, daß $\mathfrak{A} \models \mathsf{Leer}$ und daß dies auch in Ihrem modifizierten Graphen $\mathfrak{A}'$ aus (G4.3) gilt.

(G4.5) Das *Extensionalitätsaxiom* ist $\mathsf{Ext} := \forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \leftrightarrow x \equiv y)$. Zeigen Sie, daß $\mathfrak{A} \models \mathsf{Ext}$ und daß dies *nicht* in Ihrem modifizierten Graphen $\mathfrak{A}'$ gilt.

(G4.6) Das *Paarmengenaxiom* ist $\mathsf{Paar} := \forall x \forall y \exists p \forall z (z \in p \leftrightarrow (z = x \vee z = y))$. Zeigen Sie, daß $\mathfrak{A} \not\models \mathsf{Paar}$.

(G4.7) Ist es möglich, den Graphen $\mathfrak{A}$ durch Hinzufügen endlich vieler Knoten zu einem Graphen $\mathfrak{A}^* \models \mathsf{Paar}$ zu machen?

(G4.8) Seien $x_i, x_j \in A$. Wir nennen x_i eine $\mathfrak{A}$-*Teilmenge* von x_j, falls

$$\mathfrak{A}\frac{x_i}{x}\frac{x_j}{y} \models \forall z (z \in x \rightarrow z \in y).$$

Wählen Sie ein festes i und charakterisieren Sie die Knoten, welche $\mathfrak{A}$-Teilmengen von x_i sind.

(G4.9) Seien $x_i, x_j \in A$. Wir nennen x_i *eine Potenzmenge von* x_j, falls für alle Knoten v gilt, daß $v\ E\ x_i$ genau dann, wenn v eine $\mathfrak{A}$-Teilmenge von x_j ist. Überlegen Sie sich mit Hilfe von (G4.8), daß es in $\mathfrak{A}$ für jeden Knoten x_j eine Potenzmenge gibt, und daß sie eindeutig ist.

(G4.10) Das *Potenzmengenaxiom* ist $\mathsf{Pot} := \forall x \exists p \forall y (y \in p \leftrightarrow \forall z (z \in y \to z \in x))$. Folgern Sie aus (G4.9), daß $\mathfrak{A} \models \mathsf{Pot}$.

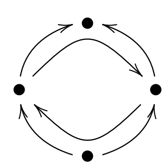
(G4.11) Erklären Sie, warum (G4.4), (G4.5), (G4.6) und (G4.10) als *Unabhängigkeitsbeweis* gesehen werden können: das Paarmengenaxiom ist keine Folgerung aus der Axiomenmenge $\{\mathsf{Leer}, \mathsf{Ext}, \mathsf{Pot}\}$.

(G4.12) Erklären Sie, warum wir auch gezeigt haben, daß die Axiomenmenge $\{\mathsf{Leer}, \mathsf{Ext}, \mathsf{Pot}\}$ nicht die folgende Aussage impliziert: "die Potenzmenge jeder dreielementigen Menge hat acht Elemente".

(G4.13) Erweitern wir den Graphen $\mathfrak{A}$ durch Hinzufügen weiterer Knoten zu einem Modell des Paarmengenaxioms Paar, gilt dann in der resultierenden Struktur "die Potenzmenge jeder dreielementigen Menge hat acht Elemente".

[*Bemerkung.* Es ist nicht ganz einfach zu sehen, daß man den Graphen zu einem Modell des Paarmengenaxioms erweitern kann. Um die Frage (fast) zu beantworten, ist es allerdings ausreichend, sich für geeignete Knoten zu überlegen, daß ihre Existenz durch das Paarmengenaxiom gefordert wird. Warum beantwortet das die Frage nur fast? Was müsste man zusätzlich über die Erweiterung wissen, damit es die Frage vollständig beantwortet?]

Präsentationsaufgabe P4 (wird in der Übung am 11. Mai 2021 präsentiert). Sei $S = S_{\mathrm{R}} = \{\in\}$ die Symbolmenge der Sprache der Mengenlehre und $\mathfrak{A} = (A, E)$ die folgende S-Struktur:



Überprüfen Sie, welche der von uns bisher diskutierten Axiome in diesem Modell gelten.

Hausaufgaben H4 (werden bis zum 11. Mai 2021 via Moodle abgegeben).

(H4.1) Sei S eine Symbolmenge und $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$ eine S-Struktur. Eine Teilmenge $X \subseteq A^n$ heißt *S-definierbar über* $\mathfrak{A}$, wenn es eine S-Formel φ mit freien Variablen $x_1, ..., x_n$ gibt, so daß für alle $\vec{a} := (a_1, ..., a_n) \in A^n$ gilt, daß $\vec{a} \in X$ genau dann, wenn $\mathfrak{A} \models \varphi\frac{a_1}{x_1} \ldots \frac{a_n}{x_n}$.

Sei nun $R \notin S$ ein Relationssymbol. Falls $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$ eine S-Struktur ist und $\mathfrak{A}^* = (A, \mathfrak{a}^*)$ eine $S \cup \{R\}$-Struktur ist, so nennen wir $\mathfrak{A}^*$ eine *relationale Definitionserweiterung* von $\mathfrak{A}$, falls $\mathfrak{A}$ das S-Redukt von $\mathfrak{A}^*$ ist und $\mathfrak{a}^*(R)$ eine S-definierbare Teilmenge von A^n ist.

Sei Pos $:= \{x \in \mathbb{Q}\,;\, x > 0\}$ und $+$, $\cdot$ und $<$ die üblichen Operationen und Relationen auf $\mathbb{Q}$.

(a) Ist die Struktur $(\mathbb{Q}, +, <)$ eine relationale Definitionserweiterung von $(\mathbb{Q}, +)$?

(b) Ist die Struktur $(\mathbb{Q}, +, \mathrm{Pos}, <)$ eine relationale Definitionserweiterung von $(\mathbb{Q}, +, \mathrm{Pos})$?

(c) Ist die Struktur $(\mathbb{Q}, \cdot, <)$ eine relationale Definitionserweiterung von $(\mathbb{Q}, \cdot)$?

(H4.2) Lösen Sie Aufgabe 3.8.9 aus dem Buch von Ebbinghaus, Flum und Thomas:

> **3.8.9 Aufgabe** Seien P und f zweistellig und $x = v_0, y = v_1, u = v_2, v = v_3$ und $w = v_4$. Man zeige anhand der Definition 3.8.2:
>
> (a) $\exists x \exists y (Pxu \wedge Pyv)\frac{u\;u\;u}{x\;y\;v} = \exists x \exists y (Pxu \wedge Pyu)$,
>
> (b) $\exists x \exists y (Pxu \wedge Pyv)\frac{v\;fuv}{u\;\;v} = \exists x \exists y (Pxv \wedge Pyfuv)$,
>
> (c) $\exists x \exists y (Pxu \wedge Pyv)\frac{u\;x\;fuv}{x\;u\;\;v} = \exists w \exists y (Pwx \wedge Pyfuv)$,
>
> (d) $(\forall x \exists y (Pxy \wedge Pxu) \vee \exists u fuu \equiv x)\frac{x\;fxy}{x\;\;u} =$
> $\forall v \exists w (Pvw \wedge Pvfxy) \vee \exists u fuu \equiv x$.

(H4.3) Zusätzlich zu den im Buch von Ebbinghaus angegebenen Axiomen wollen wir

$$\forall x \exists s \forall z (z \in s \leftrightarrow z \equiv x) \text{ und} \tag{Einer}$$

$$\forall x \forall y \exists p \forall z (z \in p \leftrightarrow (z \equiv x \vee z \equiv y)) \tag{Paar}$$

betrachten. Definieren Sie die Axiomensysteme

$$\begin{aligned}
T_0 &:= (\text{Ext})+(\text{Aus}),\\
T_1 &:= T_0 + (\text{Paar}),\\
T_2 &:= T_1 + (\textstyle\bigcup\text{-Ax}),\\
T_3 &:= T_0 + (\text{Einer})+(\cup\text{-Ax})
\end{aligned}$$

und zeigen Sie:

(a) $T_0 \not\models T_1$,

(b) $T_0 \not\models T_3$,

(c) $T_2 \models T_3$ und

(d) $T_3 \models T_1$.