Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2021
Prof. Dr. Benedikt Löwe, Tim Seifert, Lucas Wansner
Übungsblatt 3

Abgabe der Hausaufgaben am 4. Mai 2021 bis 10 Uhr (s.t.) über das Moodle

`https://lernen.min.uni-hamburg.de/course/view.php?id=1245` .

Gruppenaufgabe G3 (wird in der Übung am 27. April 2021 bearbeitet). Sei S eine Symbolmenge und $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$ eine S-Struktur. Eine Teilmenge $X \subseteq A$ heißt *S-definierbar über $\mathfrak{A}$*, falls es eine Formel $\varphi \in L^S$ mit genau einer freien Variable x gibt, so daß für alle Interpretationen $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ und alle $a \in A$ gilt:

$$a \in X \iff \mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi.$$

(G3.1) Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei S-Strukturen und $\pi : A \to B$. Erinnern Sie sich an die Notation $\mathfrak{I}^\pi$ aus der Vorlesung: falls $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$, so $\mathfrak{I}^\pi = (\mathfrak{B}, \pi \circ \beta)$. Was hatten wir im Beweis des Isomorphielemmas über diese Interpretation gezeigt (unter der Annahme, daß π ein S-Isomorphismus ist)?

(G3.2) Ein S-Isomorphismus $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}$ wird auch als *S-Automorphismus* bezeichnet. Sei π ein S-Automorphismus und φ eine S-Formel mit genau einer freien Variable x. Zeigen Sie, daß für jedes $a \in A$ gilt:

$$\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi \iff \mathfrak{I}\frac{\pi(a)}{x} \models \varphi.$$

[*Hinweis.* Überlegen Sie sich, daß nicht im allgemeinen gilt, daß $(\mathfrak{I}\frac{a}{x})^\pi = \mathfrak{I}\frac{\pi(a)}{x}$. Warum gilt die Behauptung trotzdem?]

(G3.3) Folgern Sie aus (G3.2), daß eine S-definierbare Menge *invariant unter Automorphismen* sein muß. Überlegen Sie sich, wie man diesen Begriff präzise definiert und geben Sie einen Beweis dieser Eigenschaft mit Hilfe von (G3.2).

Sei $S := \{\mathbf{0}, \oplus, \otimes\}$ mit einem Konstantensymbol $\mathbf{0}$ und zwei binären Funktionssymbolen $\oplus$ und $\otimes$. Betrachten Sie $S_0 := \varnothing$, $S_1 := \{\mathbf{0}\}$, $S_2 := \{\mathbf{0}, \oplus\}$ und $S_3 := S$, sowie $A := \mathbb{Z}$ und $\mathfrak{a}(\mathbf{0}) = 0$, $\mathfrak{a}(\oplus) := +$ und $\mathfrak{a}(\otimes) := \cdot$. Sei $\mathfrak{A} := (A, \mathfrak{a})$ und $\mathfrak{A}_i$ das S_i-Redukt von $\mathfrak{A}$ (für $i \in \{0, 1, 2, 3\}$).

(G3.4) Finden Sie eine Formel, welche zeigt, daß $\varnothing \subseteq \mathbb{Z}$ eine S_0-definierbare Menge über $\mathfrak{A}_0$ ist.

(G3.5) Finden Sie eine Formel, welche zeigt, daß $\{0\} \subseteq \mathbb{Z}$ eine S_1-definierbare Menge über $\mathfrak{A}_1$ ist.

(G3.6) Finden Sie eine Formel, welche zeigt, daß $\{2z\,;\, z \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}$ eine S_2-definierbare Menge über $\mathfrak{A}_2$ ist.

(G3.7) Finden Sie eine Formel, welche zeigt, daß $\{1\} \subseteq \mathbb{Z}$ eine S_3-definierbare Menge über $\mathfrak{A}_3$ ist.

(G3.8) Überlegen Sie sich, welche S_i-Automorphismen es für die Strukturen $\mathfrak{A}_i$ gibt (für $i = 0, 1, 2, 3$).

(G3.9) Verwenden Sie (G3.3) und (G3.8), um zu zeigen, daß $\{0\}$ nicht S_0-definierbar über $\mathfrak{A}_0$ ist.

(G3.10) Verwenden Sie (G3.3) und (G3.8), um zu zeigen, daß $\{2z\,;\, z \in \mathbb{Z}\}$ nicht S_1-definierbar über $\mathfrak{A}_1$ ist.

(G3.11) Verwenden Sie (G3.3) und (G3.8), um zu zeigen, daß $\{1\}$ nicht S_2-definierbar über $\mathfrak{A}_2$ ist.

Präsentationsaufgabe P3 (wird in der Übung am 4. Mai 2021 präsentiert). Präsentieren Sie die Lösung von Aufgabe 3.1.6, Teile (a) & (c) im Buch von Ebbinghaus, Flum und Thomas:

> **3.1.6 Aufgabe** Für S-Strukturen $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$ und $\mathfrak{B} = (B, \mathfrak{b})$ sei $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, das *direkte Produkt von* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$, die S-Struktur mit Träger
>
> $$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\},$$
>
> die durch die folgenden Festlegungen gegeben ist: Für n-stelliges R aus S und $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in A \times B$ gelte
>
> $$R^{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}}(a_1, b_1)\ldots(a_n, b_n) \quad \text{gdw} \quad R^{\mathfrak{A}}a_1 \ldots a_n \text{ und } R^{\mathfrak{B}}b_1 \ldots b_n,$$
>
> für n-stelliges f aus S und $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in A \times B$ sei
>
> $$f^{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}}((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) := (f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n), f^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_n)),$$
>
> und für $c \in S$ sei
>
> $$c^{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}} := (c^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{B}}).$$
>
> Man zeige:
> (a) Sind die S_{Gr}-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Gruppen, so ist auch $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ eine Gruppe.
> (c) Sind die S_{Ar}-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ Körper, so ist $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ kein Körper.

Hausaufgaben H3 (werden bis zum 4. Mai 2021 via Moodle abgegeben).

(H3.1) Lesen Sie den Beweis des Koinzidenzlemmas 3.4.6 im Buch von Ebbinghaus, Flum und Thomas. Im Beweis werden die Fälle $t = c$, $\varphi = t_1 \equiv t_2$ und $\varphi = (\psi \vee \chi)$ nicht behandelt, sondern als "entsprechend" gekennzeichnet. Geben Sie diese Beweise.

Was ist mit den Fällen $\varphi = (\psi \wedge \chi)$, $\varphi = (\psi \to \chi)$, $\varphi = (\psi \leftrightarrow \chi)$ und $\varphi = \forall x\psi$?

(H3.2) Lösen Sie Aufgabe 3.4.11 im Buch von Ebbinghaus, Flum und Thomas:

> **3.4.11 Aufgabe** Man zeige:
> (a) $\forall x(\varphi \wedge \psi) \dashv\models (\forall x\varphi \wedge \forall x\psi)$.
> (b) $\exists x(\varphi \vee \psi) \dashv\models (\exists x\varphi \vee \exists x\psi)$.
> (c) $\forall x(\varphi \vee \psi) \dashv\models (\varphi \vee \forall x\psi)$, falls $x \notin \text{frei}(\varphi)$.
> (d) $\exists x(\varphi \wedge \psi) \dashv\models (\varphi \wedge \exists x\psi)$, falls $x \notin \text{frei}(\varphi)$.
> (e) Man zeige, dass man in (c), (d) auf die Voraussetzung „$x \notin \text{frei}(\varphi)$“ nicht verzichten kann.

(H3.3) Eine S-Formel heiße $*$-*universell*, falls in ihr die Symbole $\neg$, $\to$, $\leftrightarrow$ und $\exists$ nicht auftauchen. Ist jede universelle Formel $*$-universell? Ist jede $*$-universelle Formel universell? Begründen Sie Ihre Antworten.