Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2021
Prof. Dr. Benedikt Löwe, Tim Seifert, Lucas Wansner
Übungsblatt 13

Gruppenaufgabe G13 (wird in der Übung am 6. Juli 2021 bearbeitet). Wir betrachten die Definition der *Terminterpretation*; vgl. S. 80f im Buch von Ebbinghaus, Flum und Thomas:

> Im Folgenden sei Φ eine Menge von Ausdrücken. Wir definieren nun eine Interpretation $\mathfrak{I}^\Phi = (\mathfrak{T}^\Phi, \beta^\Phi)$. Hierzu erklären wir zunächst auf der Menge T^S der S-Terme eine zweistellige Relation $\sim$ durch
>
> **5.1.1** $t_1 \sim t_2 \quad$ *:gdw* $\quad \Phi \vdash t_1 \equiv t_2$.
>
> **5.1.2 Lemma** (a) $\sim$ *ist eine Äquivalenzrelation.*
> (b) $\sim$ *ist im folgenden Sinne mit den Symbolen aus S verträglich:*
> *Wenn $t_1 \sim t_1', \ldots, t_n \sim t_n'$, so gilt für n-stelliges $f \in S$*
>
> $$ft_1 \ldots t_n \sim ft_1' \ldots t_n'$$
>
> *und für n-stelliges $R \in S$*
>
> $$\Phi \vdash Rt_1 \ldots t_n \quad \textit{gdw} \quad \Phi \vdash Rt_1' \ldots t_n'.$$
>
> Der *Beweis* ergibt sich leicht mit der Regel ($\equiv$) und 4.5.3, 4.5.4. Wir zeigen das hier exemplarisch in zwei Fällen.
>
> (1) $\sim$ ist symmetrisch: Sei $t_1 \sim t_2$, also $\Phi \vdash t_1 \equiv t_2$. Nach 4.5.3(a) gilt dann $\Phi \vdash t_2 \equiv t_1$, d.h. $t_2 \sim t_1$.
>
> (2) f sei ein n-stelliges Funktionssymbol aus S, und es sei $t_1 \sim t_1', \ldots, t_n \sim t_n'$, d.h. $\Phi \vdash t_1 \equiv t_1', \ldots, \Phi \vdash t_n \equiv t_n'$. Nach 4.5.4(b) gilt dann $\Phi \vdash ft_1 \ldots t_n \equiv ft_1' \ldots t_n'$, d.h. $ft_1 \ldots t_n \sim ft_1' \ldots t_n'$. $\dashv$
>
> Es sei $\overline{t}$ die Äquivalenzklasse von t:
>
> $$\overline{t} := \{t' \in T^S \mid t \sim t'\},$$
>
> und T^Φ (statt genauer $T^{\Phi,S}$) die Menge der Äquivalenzklassen:
>
> $$T^\Phi := \{\overline{t} \mid t \in T^S\}.$$
>
> T^Φ ist nicht leer. Über T^Φ definieren wir die S-Struktur $\mathfrak{T}^\Phi$, die sog. *Termstruktur* zu Φ, durch die folgenden Festsetzungen:
>
> **5.1.3** *Für n-stelliges $R \in S$:*
>
> $$R^{\mathfrak{T}^\Phi}\overline{t_1} \ldots \overline{t_n} \quad \textit{:gdw} \quad \Phi \vdash Rt_1 \ldots t_n.$$
>
> **5.1.4** *Für n-stelliges $f \in S$:*
>
> $$f^{\mathfrak{T}^\Phi}(\overline{t_1}, \ldots, \overline{t_n}) := \overline{ft_1 \ldots t_n}.$$
>
> **5.1.5** *Für $c \in S$:* $c^{\mathfrak{T}^\Phi} := \overline{c}$.

(G13.1) Sei S eine beliebige Symbolmenge und $\mathbf{\Phi_1} := \{\neg\exists x \exists y \neg x \equiv y\}$. Beschreiben Sie $\mathrm{Mod}^S \mathbf{\Phi_1}$.

(G13.2) Zeigen Sie, daß $\mathrm{Mod}^S \boldsymbol{\Phi_1}$ keine Menge sein kann.

[*Hinweis.* Erinnern Sie sich daran, wie wir gezeigt hatten, daß es keine Menge aller Einermengen gibt.]

(G13.3) Zeigen Sie, daß die folgenden Regeln im Gentzenkalkül ableitbar sind:

$$\begin{array}{lll} \Gamma & & \varphi \\ \Gamma & \varphi & \psi \\ \hline \Gamma & & \psi \end{array} \text{ (KS)} \qquad \begin{array}{lll} \Gamma & \varphi & \psi \\ \hline \Gamma & \neg\psi & \neg\varphi \end{array} \text{ (KP)} \qquad \begin{array}{ll} \Gamma & \neg\neg\varphi \\ \hline \Gamma & \varphi \end{array} \text{ (DN)}$$

Überlegen Sie sich, warum diese Regeln "Kettenschluß", "Kontraposition" und "Doppelte Negation" heißen.

(G13.4) Seien v und w zwei Variablen. Zeigen Sie im Gentzenkalkül, daß $v \sim w$ (das ist die in 5.1.1 im Buch von Ebbinghaus, Flum und Thomas definierte Relation, hier unter Verwendung von $\boldsymbol{\Phi_1}$). Listen Sie auf, welche Regeln des Gentzenkalküls Sie für Ihren Beweis gebraucht haben.

[*Hinweis.* Verwenden Sie die ableitbaren Regeln aus (G13.3) und bedenken Sie, daß deren Ableitung auch Regeln aus dem Gentzenkalkül verwendet hat.]

(G13.5) Verallgemeinern Sie den Beweis aus (G13.4) auf beliebige S-Terme t und t'.

(G13.6) Bestimmen Sie unter Verwendung von (G13.5), was die Termstruktur $\mathfrak{T}^{\boldsymbol{\Phi_1}}$ ist. Bemerken Sie, daß daraus folgt, daß $\mathfrak{T}^{\boldsymbol{\Phi_1}} \models \boldsymbol{\Phi_1}$.

(G13.7) Sei nun Φ eine Menge von S-Sätzen, welche in mindestens einer S-Struktur mit mindestens zwei Elementen erfüllt ist. Sei $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$ eine solche Struktur mit $a \neq b \in A$. Definieren Sie eine Belegung $\beta(x) := a$ und $\beta(y) := b$ für zwei verschiedene Variablen x und y. Folgern Sie, daß $\Phi \nvdash x \equiv y$.

[*Hinweis.* Verwenden Sie, daß Φ eine Menge von *S-Sätzen* ist und die Korrektheit des Gentzenkalküls.]

(G13.8) Überlegen Sie sich, warum Sie (G13.7) nicht für allgemeine Mengen von S-Ausdrücken beweisen können.

(G13.9) Überlegen Sie sich, wie man das Argument von (G13.7) erweitern kann, um zu zeigen, daß alle Variablen paarweise nicht in der Relation $\sim$ stehen. Folgern Sie daraus, daß das Termmodell $\mathfrak{T}^{\Phi}$ unendlich viele Elemente hat.

(G13.10) Geben Sie nun ein Beispiel für Φ an, so daß $\mathfrak{T}^{\Phi} \not\models \Phi$.

[*Hinweis.* Nehmen Sie einen einzelnen Satz, der impliziert, daß es nur endlich viele Elemente gibt, aber den Voraussetzungen von (G13.7) entspricht.]

(G13.11) Insbesondere gilt, daß Ihr Beispiel Φ aus (G13.10) den Satz von Henkin nicht erfüllen kann. Welche Voraussetzung(en) des Satzes von Henkin erfüllt Ihr Beispiel nicht?