Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2021
Prof. Dr. Benedikt Löwe, Tim Seifert, Lucas Wansner
Übungsblatt 12

Abgabe der Hausaufgaben am 6. Juli 2021 bis 10 Uhr (s.t.) über das Moodle

`https://lernen.min.uni-hamburg.de/course/view.php?id=1245` .

Gruppenaufgabe G12 (wird in der Übung am 29. Juni 2021 bearbeitet).

(G12.1) Sei S eine Symbolmenge und c ein Konstantensymbol, welches nicht in S vorkommt. Wir setzen $S^* := S \cup \{c\}$. Wir wollen S^*-Strukturen auch als *punktierte S-Strukturen* bezeichnen. Überlegen Sie sich Beispiele: punktierte Gruppen $(G, +, 0, g)$, punktierte Körper $(K, +, \times, 0, 1, k)$, punktierte Graphen (V, E, v) etc. Machen Sie sich klar, dass die Axiome der punktierten Gruppen (Körper, Graphen) einfach nur die Axiome der Gruppen (Körper, Graphen) sind; inbesondere bestehen sie aus S-Sätze (nicht S^*-Sätzen).

(G12.2) Wie in der Vorlesung im Falle der Peano-Strukturen betrachten wir (diesmal in der Sprache der geordneten Körper $S := \{+, \times, 0, 1, <\}$) die Terme $t_0 := 0$ und $t_{n+1} := t_n + 1$. Betrachten Sie die S-Formel $\gamma_n := x > t_n$ in einer freien Variable x. Sei $\mathfrak{R} := (\mathbb{R}, +, \times, 0, 1, <)$ der geordnete Körper der reellen Zahlen. Überlegen Sie sich, welche Belegungen β die Formel γ_n wahr machen.

(G12.3) Ein geordneter Körper $\mathfrak{F}$ heißt *archimedisch*, falls für jede Belegung β ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $\mathfrak{F}, \beta \models \neg\gamma_n$. Falls Sie den Begriff "archimedisch" noch nie gehört haben, verstehen Sie diese Definition; falls Sie ihn schon einmal in einem anderen Kontext gehört haben, vergewissern Sie sich, daß diese Definition äquivalent zu derjenigen ist, die Sie aus anderen Vorlesungen kennen.

(G12.4) Betrachten Sie nun *punktierte geordnete Körper* aus (G12.1) in der Sprache mit der Symbolmenge $S^* = \{+, \times, 0, 1, <, c\}$. Unter Verwendung der Terme t_n aus (G12.2) betrachten Sie die S^*-Formel $\delta_n := c > t_n$ und $\Delta := \{\delta_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$.

Für einen geordneten Körper $\mathfrak{F} = (F, +, \times, 0, 1, <)$ beschreiben Sie die $x \in F$, so daß

$$(\mathfrak{F}, x) \models \delta_n \text{ und}$$
$$(\mathfrak{F}, x) \models \Delta.$$

(G12.5) Zeigen Sie unter Verwendung Ihrer Überlegungen aus (G12.4): Ein geordneter Körper $\mathfrak{F} = (F, +, \times, 0, 1, <)$ ist genau dann nicht-archimedisch, wenn ein $x \in F$ existiert, so daß $(\mathfrak{F}, x) \models \Delta$.

(G12.6) Betrachten Sie nun Strukturen $\mathfrak{R}_r := (\mathbb{R}, +, \times, 0, 1, <, r)$ für $r \in \mathbb{R}$. In Analogie zu (G12.2) und (G12.4) überlegen Sie sich, wann $\mathfrak{R}_r \models \delta_n$. Vergewissern Sie sich, daß für kein $r \in \mathbb{R}$ gilt, daß $\mathfrak{R}_r \models \Delta$.

(G12.7) Sei $T := \{\varphi \in L_0^S \,;\, \mathfrak{R} \models \varphi\}$ die Menge aller im geordneten Körper der reellen Zahlen wahren S-Sätze. Zeigen Sie, daß $T \cup \Delta$ endlich erfüllbar ist.

[*Hinweis.* Verwenden Sie (G12.6).]

(G12.8) Folgern Sie aus (G12.7), daß es ein Modell $\mathfrak{F} \models T \cup \Delta$ gibt. Dieser geordnete Körper ist nicht-archimedisch (warum?) und erfüllt genau dieselben S-Sätze wie $\mathfrak{R}$.

(G12.9) Überlegen Sie sich, warum Sie o.B.d.A. annehmen können, daß $\mathbb{Q} \subseteq F$.

(G12.10) Zeigen Sie, daß es im geordneten Körper $\mathfrak{F}$ *infinitesimale Elemente* geben muss, d.h. Elemente $x \neq 0$, die kleiner sind als jede positive rationale Zahl $\varepsilon \in \mathbb{Q}$.

(G12.11) Zeigen Sie, daß es keine Satzmenge $\Psi_{\mathrm{a}} \subseteq L_0^S$ geben kann, welche die archimedischen Körper charakterisiert, also $\mathfrak{F} \models \Psi_{\mathrm{a}}$ genau dann, wenn $\mathfrak{F}$ archimedisch ist.

(G12.12) Zeigen Sie, daß es keine Satzmenge $\Psi_{\mathrm{r}} \subseteq L_0^S$ geben kann, welche die reellen Zahlen bis auf Isomorphie charakterisiert, also $\mathfrak{F} \models \Psi_{\mathrm{r}}$ genau dann, wenn $\mathfrak{F}$ isomorph zu $\mathfrak{R}$ ist.

Präsentationsaufgabe P12 (wird in der Übung am 6. Juli 2021 präsentiert). Sehen Sie sich bitte die zwei Hauptaufgaben und die drei Zusatzaufgaben der Musterklausur an und bereiten Sie entweder eine Präsentation einer Aufgabe oder Fragen zu einer der Aufgaben vor.

Hausaufgaben H12 (werden bis zum 6. Juli 2021 via Moodle abgegeben).

(H12.1) Sei $\mathfrak{C}$ eine Klasse von S-Strukturen. Wir bezeichnen die Klasse aller S-Strukturen, welche *nicht* in $\mathfrak{C}$ sind als die *zu* $\mathfrak{C}$ *komplementäre Klasse.*

Zeigen Sie:

(a) Ist $\mathfrak{C}$ elementar, so ist auch die zu $\mathfrak{C}$ komplementäre Klasse elementar.

(b) Die Klasse der unendlichen Gruppen ist Δ-elementar (s. Vorlesung XXII), aber nicht elementar.

(H12.2) Lösen Sie Aufgabe 4.5.5 aus dem Buch von Ebbinghaus, Flum und Thomas:

> **4.5.5 Aufgabe** Man zeige, dass die folgenden Regeln ableitbar sind:
>
> (a1) $\dfrac{\Gamma \quad \forall x\varphi}{\Gamma \quad \varphi\frac{t}{x}}$ (a2) $\dfrac{\Gamma \quad \forall x\varphi}{\Gamma \quad \varphi}$
>
> (b1) $\dfrac{\Gamma \quad \varphi\frac{t}{x} \quad \psi}{\Gamma \quad \forall x\varphi \quad \psi}$ (b2) $\dfrac{\Gamma \quad \varphi\frac{y}{x}}{\Gamma \quad \forall x\varphi}$, falls y nicht frei in $\Gamma\, \forall x\varphi$
>
> (b3) $\dfrac{\Gamma \quad \varphi \quad \psi}{\Gamma \quad \forall x\varphi \quad \psi}$ (b4) $\dfrac{\Gamma \quad \varphi}{\Gamma \quad \forall x\varphi}$, falls x nicht frei in Γ

(H12.3) Sei S eine beliebige Symbolmenge (möglicherweise überabzählbar) und L_0^S die Menge der S-Sätze. Eine Menge $\Psi \subseteq L_0^S$ heißt *maximalkonsistent*, falls sie widerspruchsfrei ist und keine echten widerspruchsfreien Obermengen hat.

Zeigen Sie (unter Verwendung des Auswahlaxioms), daß jede widerspruchsfreie Menge Φ eine maximalkonsistente Obermenge $\Psi \supseteq \Phi$ hat. Finden Sie einen Beweis, welcher das Zornsche Lemma verwendet und einen anderen, welcher den Wohlordnungssatz verwendet.

Wie können Sie die Verwendung des Auswahlaxioms verhindern, wenn Sie wissen, daß S abzählbar ist?