Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2021
Prof. Dr. Benedikt Löwe, Tim Seifert, Lucas Wansner
Übungsblatt 11

Abgabe der Hausaufgaben am 29. Juni 2021 bis 10 Uhr (s.t.) über das Moodle

`https://lernen.min.uni-hamburg.de/course/view.php?id=1245` .

Gruppenaufgabe G11 (wird in der Übung am 22. Juni 2021 bearbeitet). Sie kennen das *Zornsche Lemma* aus anderen Lehrveranstaltungen. Wir wollen es hier in der folgenden Formulierung betrachten: Sei $(P, \leq)$ eine partielle Ordnung. Eine Teilmenge $C \subseteq P$ heißt *Kette*, falls $(C, \leq)$ eine lineare Ordnung ist. Ein $p \in P$ heißt *obere Schranke* für $X \subseteq P$, falls für alle $x \in X$ gilt, daß $x \leq p$. Die Ordnung $(P, \leq)$ heißt *kettenvollständig*, wenn jede Kette eine obere Schranke hat. Ein Element $m \in P$ heißt *maximal*, falls für alle $p \geq m$ gilt, daß $p = m$.

Das *Zornsche Lemma* besagt, daß jede kettenvollständige partielle Ordnung (mindestens) ein maximales Element hat.

(G11.1) Vergewissern Sie sich, daß die obige Formulierung des Zornschen Lemmas äquivalent zu der Formulierung ist, die Sie aus anderen Vorlesungen kennen.

(G11.2) Sei X eine Menge. Überlegen Sie sich, daß die Potenzmenge von X, geordnet durch $\subseteq$ eine kettenvollständige partielle Ordnung ist. Was ist ihr (eindeutiges) maximales Element?

(G11.3) Sei X eine endliche Menge und $P := \mathrm{Pot}(X) \backslash \{X\}$, wiederum geordnet durch $\subseteq$. Überlegen Sie sich, daß $(P, \subseteq)$ eine kettenvollständige partielle Ordning sind. Was sind ihre maximalen Elemente?

(G11.4) Sei X eine unendliche Menge und F die Menge aller endlichen Teilmengen von X. Zeigen Sie, daß $(F, \subseteq)$ nicht kettenvollständig ist und keine maximalen Elemente hat.

(G11.5) Wir zeigen nun in (G11.5) bis (G11.9) das Zornsche Lemma unter Annahme des Auswahlaxioms. Sei $(P, \leq)$ eine partielle Ordnung und $p \in P$ nicht maximal. Dann ist $X_p := \{q \in P\,;\, p < q\} \neq \varnothing$. Sei $N := \{p \in P\,;\, p \text{ ist nicht maximal}\}$. Überlegen Sie sich, daß das Auswahlaxiom impliziert, daß es eine Funktion $c : N \to P$ gibt, so daß $c(p) > p$ für alle $p \in N$.

(G11.6) Wir nehmen zusätzlich an, daß $(P, \leq)$ kettenvollständig ist. Sei $K := \{C \subseteq P\,;\, C \text{ ist eine Kette}\}$. Überlegen Sie sich, daß das Auswahlaxiom impliziert, daß eine Funktion $c^* : K \to P$ existiert, daß für alle $C \in K$, $c^*(C)$ eine obere Schranke von C ist. Ist C eine Kette ohne größtes Element, so gilt insbesondere, daß $c^*(C) > q$ für alle $q \in C$.

(G11.7) Angenommen, $(P, \leq)$ habe kein maximales Element. Dann ist $N = P$ und somit $\mathrm{Def}(c) = P$. Sei $\kappa := H_P$, das Hartogs-Aleph von P. Wir definieren per transfinite Rekursion eine Funktion $f : \kappa \to P$ wie folgt:

$$\begin{aligned} f(0) &:= c^*(\varnothing), \\ f(\alpha+1) &:= c(f(\alpha)) \text{ und} \\ f(\lambda) &:= c^*(\{f(\xi)\,;\,\xi < \lambda\}). \end{aligned}$$

Überlegen Sie sich zunächst, daß diese Definition sinnvoll ist, indem Sie beweisen, daß $\{f(\xi)\,;\,\xi < \lambda\}$ eine Kette ist. Beachten Sie, daß dies eine Kette ohne größtes Element ist.

(G11.8) Jetzt zeigen Sie unter den Voraussetzungen von (G11.7), daß f eine Injektion ist.

(G11.9) Vergewissern Sie sich, daß wir damit das Zornsche Lemma bewiesen haben.

(G11.10) Ist X eine beliebige Menge, so setze $A := \{c\,;\,\text{es gibt ein } Z \subseteq \mathrm{Pot}(X), \text{ so daß } c \text{ eine Auswahlfunktion für } Z \text{ ist}\}$. Zeigen Sie, daß $(A, \subseteq)$ eine kettenvollständige partielle Ordnung ist.

(G11.11) Sei $c \in A$, so daß ein $Z \subseteq X$ existiert mit $Z \notin \mathrm{Def}(c)$. Zeigen Sie, daß c nicht maximal in $(A, \subseteq)$ sein kann.

(G11.12) Überzeugen Sie sich, daß dies zeigt, daß das Zornsche Lemma das Auswahlaxiom impliziert.

Präsentationsaufgabe P11 (wird in der Übung am 29. Juni 2021 präsentiert).

(P11.1) Verwenden Sie das Auswahlaxiom, um zu zeigen, daß für jede Ordinalzahl α gilt, daß jede unbeschränkte Teilmenge von $\aleph_{\alpha+1}$ Kardinalität $\aleph_{\alpha+1}$ haben muß.

[*Hinweis.* Falls $|C| < \aleph_{\alpha+1}$, so existiert eine Surjektion von $\aleph_\alpha$ auf C (warum?). Falls $\gamma \in C$, so existiert eine Surjektion von $\aleph_\alpha$ auf γ. Fügen Sie diese Surjektionen zu einer Surjektion von $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ auf $\aleph_{\alpha+1}$ zusammen und leiten Sie einen Widerspruch aus dem Satz von Hessenberg her.]

(P11.2) Überlegen Sie sich, daß die Aussage von (P11.1) nicht für alle Alephs gilt (geben Sie ein konkretes Gegenbeispiel).

Hausaufgaben H11 (werden bis zum 29. Juni 2021 via Moodle abgegeben).

(H11.1) Seien X, Y und Z Mengen. Sei A die Menge aller Funktionen von Y nach X, B die Menge aller Funktionen von Z nach A und C die Menge aller Funktionen von $Y \times Z$ nach X. Zeigen Sie, daß es eine Bijektion zwischen B und C gibt.

Können Sie diese Aussage verwenden, um zu zeigen, daß es genauso viele reelle Zahlen wie Folgen reeller Zahlen gibt?

[*Hinweis.* Für die zweite Frage verwenden Sie, daß es eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}$ und der Menge aller Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\{0, 1\}$ gibt. Warum gilt dies?]

(H11.2) Wir definieren die *von Neumann-Hierarchie* durch transfinite Rekursion auf den Ordinalzahlen:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 &:= \varnothing, \\ \mathbf{V}_{\alpha+1} &:= \mathrm{Pot}(\mathbf{V}_\alpha) \text{ und} \\ \mathbf{V}_\lambda &:= \bigcup\{\mathbf{V}_\xi\,;\, \xi < \lambda\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß für alle Ordinalzahlen α gilt, daß $\mathbf{V}_\alpha$ eine transitive Menge ist und daß

$$\{\beta \in \mathbf{V}_\alpha\,;\, \beta \text{ ist eine Ordinalzahl}\} = \alpha.$$

(H11.3) Sei Φ eine beliebige Menge von Formeln.

(a) Definieren Sie einen Kalkül $\mathfrak{K}_\Phi$, so daß $\vdash_{\mathfrak{K}_\Phi} \varphi$ genau dann, wenn $\varphi \in \Phi$.

(b) Zeigen Sie: falls $\mathfrak{K}_\Phi$ korrekt ist, so ist Φ $\mathfrak{K}_\Phi$-widerspruchsfrei.

(c) Gilt die Umkehrung von (b)?

(d) Ein Kalkül $\mathfrak{K}$ heißt *explosiv*, falls für jede $\mathfrak{K}$-widersprüchliche Menge Ψ und jedes φ gilt, daß $\Psi \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$. Zeigen Sie, daß es nicht-explosive Kalküle gibt. Können diese korrekt sein?