Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2021
Prof. Dr. Benedikt Löwe, Tim Seifert, Lucas Wansner
Übungsblatt 10

Abgabe der Hausaufgaben am 22. Juni 2021 bis 10 Uhr (s.t.) über das Moodle

`https://lernen.min.uni-hamburg.de/course/view.php?id=1245` .

Gruppenaufgabe G10 (wird in der Übung am 15. Juni 2021 bearbeitet).

(G10.1) Wir erinnern uns an die Konstruktion eines lokalendlichen Modells von FST aus Vorlesung XI und Gruppenaufgabe **G6**: $A_0 := \{0\}$, $E_0 := \varnothing$ und $\mathfrak{A}_0 := (A_0, E_0)$. Falls $\mathfrak{A}_n = (A_n, E_n)$ bereits definiert war, so betrachteten wir

$$N_n := \{X \in \mathrm{Pot}(A_n)\,;\, X \text{ ist in } \mathfrak{A}_n \text{ nicht bedient}\}$$

und fanden für jedes $X \in N_n$ eine natürliche Zahl $n_X \notin A_n$, um zu definieren:

$$\begin{aligned} A_{n+1} &:= A_n \cup \{n_X\,;\, X \in N_n\} \text{ und} \\ E_{n+1} &:= E_n \cup \{(k, n_X)\,;\, X \in N_n \text{ und } k \in X\}. \end{aligned}$$

Erinnern Sie sich insbesondere an die *Geburtsdatumsfunktion* und wie wir die Gültigkeit der Axiome im Modell $\mathfrak{A}_\infty$ gezeigt hatten.

(G10.2) Wir arbeiten in dieser Aufgabe in $\mathsf{Z} + \mathsf{Ers}$. Verwenden Sie den *Allgemeinen Rekursionssatz*, um die folgende Definition vorzunehmen:

$$\begin{aligned} V_0 &:= \varnothing \text{ und} \\ V_{n+1} &:= \mathrm{Pot}(V_n). \end{aligned}$$

Überlegen Sie sich, daß die Menge $S := \{V_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ existiert und somit $H := \bigcup S$.

(G10.3) Überzeugen Sie sich, daß sowohl $\mathbb{N}$ als auch $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ Teilmengen von H sind.

(G10.4) Überlegen Sie sich, daß die Abbildung $0 \mapsto \varnothing$ ein Isomorphismus zwischen $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{V}_1 := (V_1, \in)$ ist.

(G10.5) Nehmen Sie an, daß $f_n : A_n \to V_{n+1}$ ein Isomorphismus zwischen $\mathfrak{A}_n$ und $\mathfrak{V}_{n+1} := (V_{n+1}, \in)$ ist und überlegen Sie sich, daß

$$f_{n+1} : A_{n+1} \to V_{n+2} : \begin{cases} k & \mapsto & f_n(k) & \text{falls } k \in A_n \text{ und} \\ n_X & \mapsto & \{f_n(x)\,;\, x \in X\} & \text{falls } X \in N_n \end{cases}$$

einen Isomorphismus zwischen $\mathfrak{A}_{n+1}$ und $\mathfrak{V}_{n+2} := (V_{n+2}, \in)$ definiert.

(G10.6) Folgern Sie aus (G10.4) & (G10.5), daß $\mathfrak{A}_\infty$ und $\mathfrak{H} := (H, \in)$ isomorph sind und daß insbesondere $\mathfrak{H}$ ein Modell von FST ist.

(G10.7) Nun definieren wir

$$U_0 := H \text{ und}$$
$$U_{n+1} := \mathrm{Pot}(U_n).$$

Wiederum überlegen Sie sich, daß die Menge $T := \{U_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ existiert und somit $U := \bigcup T$.

(G10.8) Wir definieren für die Menge U eine *Geburtsdatumsfunktion* durch $\mathrm{GD}(x) := \min\{n\,;\, x \in U_n\}$. Vergewissern Sie sich, daß $\mathrm{GD}(\mathbb{N}) = \mathrm{GD}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = 1$.

(G10.9) Definieren Sie $\sqsubset \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ durch

$$\begin{aligned} n \sqsubset m \iff & (n = 2k \text{ und } m = 2\ell \text{ und } k < \ell) \\ & \text{oder } (n = 2k+1 \text{ und } m = 2\ell+1 \text{ und } k < \ell) \\ & \text{oder } (n = 2k \text{ und } m = 2\ell+1). \end{aligned}$$

Überlegen Sie sich, daß $\sqsubset \in U$ und $\mathrm{GD}(\sqsubset) = 1$, $\mathrm{GD}(\{\mathbb{N}, \sqsubset\}) = 2$ und $\mathrm{GD}((\mathbb{N}, \sqsubset)) = 3$. Überlegen Sie sich außerdem, daß $(\mathbb{N}, \sqsubset) \cong (\mathbb{N}, <) \oplus (\mathbb{N}. <)$.

(G10.10) Überlegen Sie sich, daß $\omega + n \in U$ und $\mathrm{GD}(\omega + n) = n + 1$. Folgern Sie daraus, daß $\omega + \omega \notin U$.

(G10.11) Überlegen Sie sich, daß $\mathfrak{U} := (U, \in)$ ein Modell von FST ist.

[*Hinweis.* Sie hatten sich in (G10.1) daran erinnert, wie wir dies für $\mathfrak{A}_\infty$ über die Geburtsdatumsfunktion gezeigt hatten. Um Zeit zu sparen, können Sie dies nur anhand einiger Beispielaxiome überprüfen.]

(G10.12) Überlegen Sie sich, daß $\mathfrak{U} \models \mathsf{Inf}$, also gilt $\mathfrak{U} \models \mathsf{Z}$.

(G10.13) Werden Sie sich bewußt, daß (G10.12) bedeutet, daß wir in der Theorie $\mathsf{Z} + \mathsf{Ers}$ die Existenz eines Modells der Theorie Z bewiesen haben.

(G10.14) Warum können wir aus (G10.9) und (G10.10) folgern, daß $\mathfrak{U} \not\models \mathsf{Ers}$?

[*Hinweis.* Wir hatten den *Repräsentationssatz für Wohlordnungen* in der Theorie $\mathsf{Z} + \mathsf{Ers}$ bewiesen. Stellen Sie fest, daß dieses Argument zeigt, daß die Existenz von $\omega + \omega$ nicht ohne Verwendung des Ersetzungsaxioms gezeigt werden kann.]

Präsentationsaufgabe P10 (wird in der Übung am 22. Juni 2021 präsentiert). Zeigen Sie die folgenden Aussagen über beliebige Ordinalzahlen α und β:

(P10.1) Falls $\alpha < \beta \cdot \omega$, so gilt $\beta + \alpha > \alpha$.

(P10.2) Falls $\alpha \geq \beta \cdot \omega$, so gilt $\beta + \alpha = \alpha$.

[*Hinweis.* Verwenden Sie die Eigenschaften aus (H10.1).]

Hausaufgaben H10 (werden bis zum 22. Juni 2021 via Moodle abgegeben).

(H10.1) Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften für Ordinalzahlen α, β und γ:

- (a) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.
- (b) Falls $\beta \leq \alpha$, so gibt es ein eindeutiges δ mit $\alpha = \beta + \delta$.
- (c) Falls $\alpha < \beta$, so ist $\gamma + \alpha < \gamma + \beta$.
- (d) Falls $\alpha < \beta$, so ist $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.

(H10.2) Arbeiten Sie in $\mathsf{Z}+\mathsf{Ers}$. Es sei F eine funktionale Zuordnung von Mengen zu Mengen, also eine Formel in zwei freien Variablen Φ, so daß für alle Mengen x eine eindeutige Menge $F(x)$ existiert mit $\Phi(x, F(x))$. Wir nennen F eine *normale Ordinalzahloperation*, falls sie die folgenden drei Eigenschaften hat:

- (a) für jede Ordinalzahl α ist $F(\alpha)$ eine Ordinalzahl,
- (b) für Ordinalzahlen $\alpha < \beta$ ist $F(\alpha) < F(\beta)$ und
- (c) falls λ eine Limeszahl ist, so ist $F(\lambda) = \bigcup\{F(\xi)\,;\, \xi \in \lambda\}$.

Eine Ordinalzahl γ heißt *Fixpunkt* von F, falls $F(\gamma) = \gamma$. Zeigen Sie, daß F einen Fixpunkt besitzt. Verwenden Sie diese Aussage, um zu zeigen, daß eine Kardinalzahl κ existiert, so daß $\kappa = \aleph_\kappa$.

(H10.3) Lesen und verstehen Sie den Beweis des Satzes von Hessenberg im Buch von Ebbinghaus (Satz IX.1.11 auf S. 127). Ebbinghaus schreibt auf S. 128: “Es ist nicht schwer zu sehen, daß die Struktur $(\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha, r)$ eine Ordnung i.S.v. $<$ ist.” Zeigen Sie diese Behauptung.

Ebbinghaus beweist danach, daß dies sogar eine Wohlordnung ist und wählt einen Isomorphismus f zwischen einer Ordinalzahl ε und dieser Struktur. Berechnen Sie $f(\omega)$, $f(\omega \cdot 2 + 1)$ und $f(\omega \cdot 3 + 2)$.