Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2021
Prof. Dr. Benedikt Löwe, Tim Seifert, Lucas Wansner
Übungsblatt 1

Abgabe der Hausaufgaben am 20. April 2020 bis 10 Uhr (s.t.) über das Moodle

`https://lernen.min.uni-hamburg.de/course/view.php?id=1245` .

Es gibt drei Typen von wöchentlichen Aufgaben:

1. die *Präsentationsaufgaben*, welche in der Übungsgruppe präsentiert werden, aber nicht schriftlich abgegeben werden;
2. die *Gruppenaufgaben*, welche in der Übungsgruppe in kleinen Gruppen (zwei bis drei Studierende) bearbeitet werden;
3. die *Hausaufgaben*, welche schriftlich bearbeitet und abgegeben werden.

Die ersten 15 bis 20 Minuten der Übungsgruppe sind der Vorstellung der *Präsentationsaufgabe* gewidmet. Sie können Ihre Aufgabenlösung entweder alleine oder als Zweiergruppe präsentieren. Teil der Aufgabe ist es, sich zu überlegen, wie man die Präsentation in der Zoom-Übungsgruppe am besten durchführen kann. Um die Zulassung für die Klausur zu erwerben, muß jede Teilnehmerin oder jeder Teilnehmer mindestens eine Präsentationsaufgabe vorgestellt haben.

Die *Gruppenarbeiten* setzen voraus, daß die Studierenden dem Stoff der Vorlesung gefolgt sind, erfordern aber ansonsten keine Vorbereitung. In der Zoom-Sitzung der Übungsgruppe werden Breakout-Räume erzeugt, in die sich die Kleingruppen zurückziehen, um an der Gruppenaufgabe zu arbeiten. Einer der Übungsgruppenleiter wird durch die Breakout-Räume gehen, um Fragen zu beantworten. Um die Zulassung für die Klausur zu erwerben, muß jede Teilnehmerin oder jeder Teilnehmer mindestens an der Hälfte der Gruppenarbeiten teilgenommen haben.

Die *Hausaufgaben* werden nicht korrigiert: jede bearbeitete Aufgabe (unabhängig davon, ob sie korrekt oder inkorrekt bearbeitet wurde) wird gezählt. Wir stellen korrekte studentische Lösungen über Moodle zur Verfügung, so daß Sie überprüfen können, ob Ihre Lösung korrekt war. Um die Zulassung für die Klausur zu erwerben, muß mindestens die Hälfte der Hausaufgaben bearbeitet werden.

Gruppenaufgabe G1 (wird in der Übung am 13. April 2021 bearbeitet).

(G1.1) Das Alphabet $\mathbb{A}$ bestehe aus den folgenden Symbolen: $\int$, $+$, $\cdot$, (,), d, sowie unendlich viele *Variablensymbole* x_i (für natürliche Zahlen i) und unendlich viele *Funktionssymbole* f_i (für natürliche Zahlen i).

Überlegen Sie sich, wieviele Zeichenreihen über $\mathbb{A}$ der Länge 0, 1 und 2 es gibt.

(G1.2) Wir definieren den Begriff des *Funktionsterms*: jedes Funktionssymbol ist ein Funktionsterm; falls Zeichenreihen t und t' Funktionsterme sind, so sind $(t + t')$ und $(t \cdot t')$ Funktionsterme; nichts anderes ist ein Funktionsterm.

Überlegen Sie sich, daß $(f_0 + f_1)$ ein Funktionsterm ist und daß $f_0 + f_1$ *kein* Funktionsterm ist. Wie beweisen Sie diese letzte Aussage?

(G1.3) Sei ζ eine Zeichenreihe über $\mathbb{A}$ und α ein Symbol in $\mathbb{A}$. Wir schreiben $\mathrm{anz}_\alpha(\zeta)$ für die Anzahl der Vorkommnisse von α in ζ. Zeigen Sie durch Induktion, daß für jeden Funktionsterm t gilt, daß $\mathrm{anz}_+(t) \leq \mathrm{anz}_((t)$.

Das Symbol "(" erfüllt in dieser Notation bei $\mathrm{anz}_((t)$ zwei sehr unterschiedliche Rollen. Verstehen Sie diesen Unterschied genau. Wie könnte man diese Ambiguität auflösen?

(G1.4) Wir definieren den Begriff des *Integralausdrucks*: falls t ein Funktionsterm ist und v und w Variablensymbole sind, so ist $\int t(v)\mathrm{d}w$ ein Integralausdruck.

Zeigen Sie, daß $\int f_1(x_1)\mathrm{d}x_2$ und $\int(f_1 + (f_3 \cdot f_4))(x_2)\mathrm{d}x_3$ Integralausdrücke sind.

(G1.5) Zeigen Sie, daß $\int(f_1 + f_2 + f_3)(x_1)\mathrm{d}x_1$ kein Integralausdruck ist.

[Seien Sie ganz genau in Ihrer Argumentation: "ich weiß nicht, wie ich den Ausdruck erzeugen soll" und "man kann den Ausdruck nicht erzeugen" sind keine mathematischen Argumente für die Behauptung. Man muß zeigen, *warum* man den Ausdruck nicht erzeugen kann.]

Präsentationsaufgabe P1 (wird in der Übung am 20. April 2021 präsentiert). Lösen Sie Aufgabe 2.4.8 im Buch von Ebbinghaus, Flum und Thomas:

> **2.4.8 Aufgabe** (Klammerfreie Darstellung der Ausdrücke, sog. *polnische Notation*). Sei S eine Symbolmenge und bezeichne $\mathbb{A}'$ die unter (a) bis (d) in 2.2.1 genannten Symbole. Wir setzen $\mathbb{A}'_S := \mathbb{A}' \cup S$. S-Ausdrücke in polnischer Notation (kurz S-P-Ausdrücke) seien alle Zeichenreihen über $\mathbb{A}'_S$, die man durch endlichmalige Anwendung der Regeln (A1), (A2), (A3), (A5) aus 2.3.2 und der folgenden Regel (A4)' erhalten kann:
>
> (A4)' Sind φ und ψ S-P-Ausdrücke, so sind auch $\wedge\varphi\psi$, $\vee\varphi\psi$, $\rightarrow\varphi\psi$ und $\leftrightarrow\varphi\psi$ S-P-Ausdrücke.
>
> Man beweise die 2.4.3(b) und 2.4.4(b) entsprechenden Behauptungen für S-P-Ausdrücke.

Hausaufgaben H1 (werden bis zum 20. April 2021 via Moodle abgegeben).

(H1.1) Sei $\mathbb{A}$ das Alphabet mit einem einzigen Symbol $\bullet$. Eine Zeichenreihe über $\mathbb{A}$ heiße *Basiskette*, falls Sie entweder zwei Elemente hat oder die Anzahl ihrer Elemente ein Vielfaches von elf ist. Wir definieren rekursiv den Begriff der *chinesischen Kette*: jede Basiskette ist chinesisch und falls s und t chinesische Ketten sind, so ist auch st eine chinesische Kette (wobei Hintereinanderschreiben die Verkettung zweier Folgen bezeichnet).

(a) Geben Sie zwei Beispiele für chinesische Ketten, die keine Basisketten sind.

(b) Geben Sie zwei Beispiele für nichtchinesische Ketten.

(c) Beschreiben Sie die Menge der chinesischen Ketten.

(H1.2) Sei S eine Symbolmenge. Zeigen Sie durch Induktion über den Formelaufbau, daß für jeden S-Ausdruck φ gilt, daß $\mathrm{anz}_{(}(\varphi) = \mathrm{anz}_{)}(\varphi)$.

[Wir verwenden die Notation aus (G1.3).]

(H1.3) Sei $S = S_\mathrm{R} \cup S_\mathrm{F} \cup S_\mathrm{K}$ die Symbolmenge mit $S_\mathrm{R} := \varnothing$, $S_\mathrm{F} := \{\dot{m}, \dot{a}\}$ und $S_\mathrm{K} := \{\dot{e}\}$. Sei σ die Signatur mit $\sigma(\dot{m}) = \sigma(\dot{a}) = 2$. Interpretieren Sie $\dot{m}$ als Multiplikation, $\dot{a}$ als Addition und $\dot{e}$ als 1 und drücken Sie den informellen Term $x^2 + 2x + 1$ als S-Term aus. Geben Sie eine Ableitung für den Term im Termkalkül.