Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2021
Prof. Dr. Benedikt Löwe, Tim Seifert, Lucas Wansner

Musterklausur

Technischer Ablauf. Die Klausur ist eine sogenannte *Kofferklausur* (*open book exam*): Sie dürfen alle schriftlichen Hilfsmittel nutzen, die Ihnen zur Verfügung stehen, d.h., Vorlesungsnotizen, Vorlesungsmitschriften, Übungsblätter, Lösungen von Hausaufgaben, studentische Lösungen der Hausaufgaben, Gruppenarbeitsnotizen, Vorbereitungsmaterial, Bücher, etc. Sie dürfen während der Klausur mit keiner Person in Kontakt treten: dies schließt e-mail-Kontakt und Fragen in Internetforen ein.

Die Tatsache, daß Sie eigenständig gearbeitet haben, bestätigen Sie auf der Klausur durch den handschriftlichen Satz

> *Ich bestätige hiermit, daß ich die Klausur ohne Hilfe einer weiteren Person geschrieben habe.*

und Ihrer Unterschrift auf der ersten Seite der Abgabe. Sie schreiben die Klausur *handschriftlich*, entweder auf Papier oder auf einer graphischen Oberfläche. Nach Fertigstellung der Klausur erstellen Sie eine einzelne pdf-Datei

(Option 1) indem Sie die handschriftlichen Papierseiten fotografieren und mit Hilfe eines Programms in eine einzelne pdf-Datei verwandeln (in diesem Fall achten Sie darauf, daß die Bilder leserlich sind und keine Seite fehlt), oder

(Option 2) indem Sie den elektronischen handschriftlichen Text in einer pdf-Datei abspeichern.

Diese pdf-Datei laden Sie dann als Abgabe im Moodle hoch. Für die Umwandlung der Klausur in pdf-Format und das Hochladen haben Sie 15 Minuten, so daß Sie bitte bis 18:00 Uhr Ihre Abgabe hochgeladen haben. Sollte es technische Probleme geben, melden Sie sich bitte umgehend per e-mail: `loewe@math.uni-hamburg.de`.

Struktur der Klausur. Die Klausur besteht aus zwei Teilen: den *Hauptaufgaben* (je eine zur Logik und eine zur Mengenlehre) und den *Zusatzaufgaben*.

Hauptaufgaben. Die Hauptaufgaben entscheiden über das Bestehen der Klausur und Sie sollten (mindestens) 45 bis 60 Minuten Ihrer Zeit auf die beiden Hauptaufgaben verwenden. Fangen Sie nicht mit den Zusatzaufgaben an, bevor Sie mit Ihrem Ergebnis für die Hauptaufgaben zufrieden sind.

Ihre Bearbeitung der Hauptaufgaben sollte wohlstrukturiert sein: schreiben Sie nicht, was Ihnen als erstes in den Sinn kommt, sondern überlegen Sie sich erst, was Sie sagen wollen und wie sie es sagen wollen; skizzieren Sie die Struktur der Antwort; erst danach schreiben Sie Ihre Antwort.

Bei den Hauptaufgaben geht es nicht um technische Details, sondern um Ihr Verständnis. Sie dürfen Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen ohne Beweis verwenden: falls Sie dies tun, verweisen Sie präzise (z.B. durch expliziten Verweis auf die Vorlesungsnotizen, Hausaufgaben, Präsentationsaufgaben oder Gruppenaufgaben).

Eine angemessene Bearbeitung der beiden Hauptaufgaben (alle wesentlichen Ideen sind angesprochen; keine schwerwiegenden Fehler) sorgt dafür, daß Sie die Klausur bestanden haben. Besonders gute Bearbeitungen der Hauptaufgaben verbessern die Gesamtnote.

Zusatzaufgaben. Erst nachdem Sie mit Ihrem Ergebnis bei den Hauptaufgaben zufrieden sind, bearbeiten Sie die drei Zusatzaufgaben. Diese tragen nicht zum Bestehen der Klausur, aber zur Gesamtnote bei; eine *sehr gute* Gesamtnote kann nur erreicht werden, wenn alle drei Zusatzaufgaben bearbeitet wurden. Teilen Sie sich Ihre Zeit gut ein: wenn Sie alle drei Zusatzaufgaben bearbeiten wollen, sollten Sie zwischen 20 und 25 Minuten pro Aufgabe einplanen.

$*$

HAUPTAUFGABEN.

Logik. Sei S eine Symbolmenge und $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$ eine S-Struktur. Erläutern Sie, was es heißt, daß eine Teilmenge $X \subseteq A$ *S-definierbar ist* und wie man die Existenz eines nichttrivialen S-Automorphismus auf $\mathfrak{A}$ verwenden kann, um zu zeigen, daß eine Menge *nicht* S-definierbar ist: geben Sie ein konkretes Beispiel.

Mengenlehre. Das *Vergleichsprinzip* besagt: "für je zwei Mengen x und y gibt es eine Injektion von x nach y oder eine Injektion von y nach x". Erklären Sie den Zusammenhang zwischen dem Vergleichsprinzip und dem Auswahlaxiom und erläutern Sie, warum man das Vergleichsprinzip nicht ohne Verwendung des Auswahlaxioms beweisen kann.

ZUSATZAUFGABEN.

(1) Betrachten Sie die Menge $\mathbb{N}_{\text{Zermelo}} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\{\varnothing\}\}\}, \ldots\}$ und die Struktur $\mathfrak{Z} := (\mathbb{N}_{\text{Zermelo}}, \in)$. Überprüfen Sie, welche der folgenden Axiome in $\mathfrak{Z}$ gelten:

(a) Paarmengenaxiom,

(b) Potenzmengenaxiom,

(c) großes Vereinigungsaxiom,

(d) Aussonderungsaxiom(enschema).

(2) Seien α und β Ordinalzahlen. Zeigen Sie: falls $\alpha + \alpha + \beta + \beta = \beta + \beta + \alpha + \alpha$, so gilt $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

[*Hinweis.* Sie dürfen alle Rechenregeln für Ordinalzahlen verwenden, die wir in der Vorlesung und den Übungen bewiesen haben, wenn Sie eine korrekte Referenz auf die Rechenregel geben.]

(3) Sei $S = \{1, \cdot\}$ die Symbolmenge der Gruppentheorie mit einem Konstantensymbol 1 und einem zweistelligen Funktionssymbol $\cdot$. Falls $(G, 1, \cdot)$ eine Gruppe ist und $g \in G$, so definieren wir rekursiv

$$\begin{aligned} g^0 &:= 1 \text{ und} \\ g^{n+1} &:= g^n \cdot g. \end{aligned}$$

Ein Element $g \in G$ heiße *infinitär*, falls für alle $n \geq 0$ gilt, daß $g^n \neq 1$. Eine Gruppe heiße *infinitär*, falls sie ein infinitäres Element hat. Zeigen Sie, daß die Klasse der infinitären Gruppen nicht S-axiomatisierbar ist.

[*Hinweis.* Sie dürfen ohne Beweis verwenden, daß es eine nicht infinitäre Gruppe $\mathfrak{H} = (H, 1, \cdot)$ gibt, in der für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $g \in H$ existiert, so daß für alle $0 < k \leq n$ gilt, daß $g^k \neq 1$.]