Ziel
Wir haben:

(Ext)
(Aus)

Zwei "scheinbare" Axiome:

LM
Ener Paar

Ergebnisse:
1. LM + Ener macht Modelle
weitreich und

2. Aus schließt "Menge aller
Mengen" aus.

Mathematische Logik & Mengenlehre
VORLESUNG XI

ZFC
übliche Axiome der Mengenlehre

Zermelo 1908
Fraenkel

Zermelo-Fraenkel

Z/20

ZFC
Auswahl

"Choice"
Auswahlanaxom

Dann fehlten: - Ersetzungsaxiom
(Skolem, Fraenkel)
- Induktionssaxiom
Regularitätsaxiom
(von Neumann)
"Kleines" Vereinigungsmengenaxiom (U-Ax):
Zu je zwei Mengen $x$ und $y$ gibt es eine Menge, die alle Elemente von $x$ und $y$ enthält.
Also:
\[ \forall x \exists y \forall z (z \in x \land z \in y \rightarrow z \in y) \]

Man beachte: \[
\forall x \exists y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y))
\]
folgt aus der Existenz einer Menge, welche alle Elemente von $x$ und $y$ enthält.

Großes Vereinigungsmengenaxiom (U-Ax):
Zu jeder Menge $X$ gibt es eine Menge, die alle Elemente der Elemente von $X$ enthält.
Also:
\[ \forall X \exists y \forall z (z \in X \land \exists x (z \in x \land x \in y)) \]

Für je zwei Mengen $a$ und $b$ existiert ein Mengenpaar $\{a, b\}$.
"Großes" Vereinigungsmengenaxiom (\(\bigcup\)-Ax):

Zu jeder Menge \(X\) gibt es eine Menge, die alle Elemente der Elemente von \(X\) enthält.

Also:

\[
\forall X \exists y \forall z (x \in X \land z \in x \rightarrow z \in y).
\]

In der Mengenlehre schreiben wir:

\[
\bigcup_{x \in X} x \text{ für } \bigcup_{x \in X} x.
\]
Wie verhalten sich $\cup$-$Ax$ und $\cap$-$Ax$ zu den bisherigen Axiomen?

$\text{Paar} + \cap$-$Ax \rightarrow \cap$-$Ax$

\[ \forall x \forall y \exists w \quad (\exists w \iff \exists x \lor \exists y) \]

Sei $\cap = \text{Paar} + \cap$-$Ax$. Seien $a, b \in A$ gegeben. Nach Paar existiert $p \in A$ mit $\forall c (\exists p \iff c = a \lor c = b)$

$\cap \frac{a}{x} \frac{b}{y} \frac{1}{z} = \forall c (\exists p \iff c = a \lor c = b)$

Nach $\cap$-$Ax$ ex. also ein $\forall e \in A$ mit

$\forall x \forall z \left( x \in p \lor z \in x \rightarrow z \in u \right)$

$\forall x \forall z \left( (x = a \lor x = b) \land z \in x \rightarrow z \in u \right)$

$\forall z \left( z \in a \lor z \in b \rightarrow z \in u \right)$

Das ist $\cup$-$Ax$. 

„Großes“ Vereinigungsmengenaxiom ($\cup$-$Ax$):

Zu jeder Menge $X$ gibt es eine Menge, die alle Elemente der Elemente von $X$ enthält.

$p = \forall x \forall y \left[ x \in X \land z \in x \rightarrow z \in y \right]$.

Also:

$\forall x \exists y \exists z \left( x \in X \land z \in x \rightarrow z \in y \right)$. 
Ohne Paarmengenaxiom ist \( U - Ax \) ggf. nicht sehr aussagekräftig:

\[ O2 = \{ (M, E) \} \quad \text{mit} \quad k E \Leftrightarrow k = b + 1. \]

Es gilt: \( O2 \subseteq U - Ax. \)

Wenn? \[ \]

Sei \( a \in \mathbb{N} \) gegeben. Falls \( a = 0 \), so ist \( a \) leer und somit erfüllt \( a \) selbst die Bedingung \( U a \) zu sein.

Falls \( a = b + 1 \), dann ist \( b \) das einzige Element von \( a \). Dann ist \( b \) die Vereinigung über \( a \).

Allerdings gilt \( U - Ax \) nicht: es gibt keine Menge, die z. B. 2 und 7 enthält.
Auf S. 34 kommt es Ebbinghaus, § 9

Paar

mit aus \( U \cdot Ax \) und \( u \cdot Ax \) folgt \( \rightarrow \) Übblatt 6

Erweiterung der mengen theologischen Sprache

In \( \text{Ext} + u \cdot Ax \) gibt es für je zwei Objekte \( a, b \) ein eindeutig bestimmtes Objekt \( c \) mit

\[ \forall z \ ( \exists c < \iff z \in a \lor z \in b ) \]

Also, falls \( \mathfrak{L} = \text{Ext} + u \cdot Ax \), so kann man in \( \mathfrak{L} \) eine Notation für die binäre Vereinigung: \( a, b \in A \), so sei \( \text{aus} \) dieses eindeutig bestimmte Objekt.
Axiomatische
Voraussetzungen

\[ \text{Ext + LM} \]
\[ \text{Ext + Aus} \]

\[ \text{Ext + u-Ax} \]
\[ \text{Ext + U-Ax} \]

\[ \text{neue Symbole} \]

\[ \emptyset \]

\[ \varphi(x, a_1, \ldots, a_n) \]

\[ \{x \in a_j \mid \varphi(x, a_1, \ldots, a_n)\} \]

Semikolon
sonst üblich
oder:
STreich
Doppel-
Punkt

[Dies sind unendlich viele Operatoren]

\[ a \setminus b := \{x \in a \mid x \notin b\} \]
\[ a \cup b := \{x : a \in a \cup b \} \]

\[ U_a = \bigcup_{x \in a} x \]
Potenzmengenaxiom (Pot):
Zu jeder Menge \( x \) gibt es eine Menge, die alle Teilmengen von \( x \) enthält.
Also:

\[ \forall x \forall y \forall z (z \subseteq x \rightarrow z \in y). \]

Die Menge aller Teilmengen heißt 

\[ \text{POTENZMENGE von } x. \]

Wie zuvor: Ext \( \rightarrow \) \( \forall x \), dann ist 

die Notation \( \text{Pot} \ (x) \) gerechtfertigt.

\[ \text{In } \{ a, b, c, d \} \text{ ist: } a \subseteq \text{d}, a \subseteq \text{c}, a \subseteq \text{b}, b \subseteq \text{c}, b \subseteq \text{d}, c \subseteq \text{d}, d \subseteq \text{d} \]

Hier gilt: \( d \) ist die Menge aller TM von \( c. \)

Aber: \( c \) hat zwei Elemente
\( d \) hat drei Elemente
Wir erwarten eigentlich: \( 2^2 = 4 \) TM:

\[ c = \{ a, b, c \} \quad \partial \{ a, b \} \quad \times \{ a, b \} \quad \neq \{ a, 6 \} \]

\[ b \quad \subseteq \quad c \]
Was ist das Verhältnis von Pot zu den anderen?

Pot + Aus $\Rightarrow$ Etw.

Sei $A = Pot + Aus$. Sei $a \in A$ beliebig. Wir suchen nun eine Menge $S$ mit $2 \in S \iff \exists a$. 

Für beliebiges $x$ gilt $x \in x \iff \forall y (x \not\in y \rightarrow x \in y)$. 

Also falls $y$ eine Potenzmenge von $x$ ist, so ist $x \in y$. 

Sei nun $p$ eine Potenzmenge von $z$, also $z \in p$. 

Sondere aus $p$ mit der Formel $z = a$ aus.

Finde $b$ mit $2 \in b$ $\iff$ $z \in p \land z = a$ 

$z = a$ $\iff$ $z = a$ 

Somit ist $b$ eine Ermenage von $a$. 
Pot + Aus + u-Ax \implies Paar.

Nach dem Argument von oben haben wir für \( a, b \in A \) jeweils

Ermögliche \( a', b' \) mit

\[
\begin{align*}
2 \in a' & \iff 2 = a \\
2 \in b' & \iff 2 = b
\end{align*}
\]

Wende \( \neg\text{Ax} \) auf \( a', b' \) an und erhalte \( u \) mit

\[
\begin{align*}
2 \in u & \iff 2 \in a' \lor 2 \in b' \\
& \iff 2 = a \lor 2 = b.
\end{align*}
\]


FST, Finite Set Theory

Endliche Mengenlehre

\[
\begin{align*}
\text{Ext} + \text{Aus} + \neg\text{Ax} + \neg\text{Ax} + \text{Pot} \\
\implies \text{LM, Emer, Paar}
\end{align*}
\]

„Kleines“ Vereinigungsmengenaxiom (\( \cup\text{Ax} \)):

Zu je zwei Mengen \( x \) und \( y \) gibt es eine Menge, die alle Elemente von \( x \) und \( y \) enthält.

Also:

\[
\forall x \forall y \forall z (z \in x \lor z \in y \implies z \in w).
\]
1. Die Mengenlehre FST erzwingt nicht, daß alle Mengen endlich sind, aber ist konsistent mit dieser Annahme [Üb. 6: Konstruktion eines Modells von FST, in dem jede Ecke nur endlich viele Pfeilvorgänger hat].

2. Für echte Mathematik braucht man also ein Funktionsaxiom, welches die Existenz unendlicher Mengen erzwingt: das Unendlichkeitsaxiom.

3. Aber bereits in FST kann man praktisch die gesamte strukturrelle Mathematik wiedergewinnen. [Ebbinghaus: Kapitel IV]
Was ist eine Funktion?

Z.B. von A nach B

\[ a \rightarrow b \]

\[ a \in A \land b \in B \land a \rightarrow b \}

\[ \Rightarrow b = b' \]

Eine Beschreibung: dies ist eine Menge gewichteter Paare:

\[ f \subseteq A \times B \]

\[ = \{(a,b); a \in A, b \in B\} \]

mit \((a,b) \in f \land (a,b') \in f \Rightarrow b = b'\)

Was ist dann eigentlich \((a,b)\)?

Wir haben vor Mengen \([\{a, b\} = \{1, 2\}]: \text{keine Tupel!}\)

Kuratowski (in FST):

\((a,b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}\)
Wir stellen fest:

\[(a, b) = (a', b') \iff a = a' \text{ und } b = b'.\]

\[\left\{\{a_3, \{a, b\}\}\right\} = \left\{\{a_3, \{a', b'\}\}\right\} \square\]

Wichtig im Beweis die Fallunterscheidung: \(a = b \neq a + b.\)

\[(\emptyset, \{a, b\}) \neq (\{a, b\}, \emptyset)\]

Die Menge \(\left\{\{a_3, \{a, b\}\}\right\}\) heißt auch das Kuratowski-Paar zu \(a\) und \(b\).

Seien \(A, B\) gegeben und \(a \in A, b \in B\). Dann ist \(\{a_3, b_3\} \subseteq A \cup B \iff \{a_3, \{a, b\}\} \in \text{Pot}(A \cup B)\).