Mathematische Logik & Mengenlehre

FÜNFTE VORLESUNG

3.3.2 Definition der Modellbeziehung Für alle $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ setzen wir:

$\mathfrak{I} \models t_1 \equiv t_2$	:gdw[1]	$\mathfrak{I}(t_1) = \mathfrak{I}(t_2)$
$\mathfrak{I} \models Rt_1 \ldots t_n$	:gdw	$R^{\mathfrak{A}}\mathfrak{I}(t_1)\ldots\mathfrak{I}(t_n)$ (d.h., $R^{\mathfrak{A}}$ trifft zu auf $\mathfrak{I}(t_1), \ldots, \mathfrak{I}(t_n)$)
$\mathfrak{I} \models \neg\varphi$	:gdw	nicht $\mathfrak{I} \models \varphi$
$\mathfrak{I} \models (\varphi \wedge \psi)$	:gdw	$\mathfrak{I} \models \varphi$ und $\mathfrak{I} \models \psi$
$\mathfrak{I} \models (\varphi \vee \psi)$	:gdw	$\mathfrak{I} \models \varphi$ oder $\mathfrak{I} \models \psi$
$\mathfrak{I} \models (\varphi \rightarrow \psi)$	:gdw	wenn $\mathfrak{I} \models \varphi$, so $\mathfrak{I} \models \psi$
$\mathfrak{I} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$	:gdw	$\mathfrak{I} \models \varphi$ genau dann, wenn $\mathfrak{I} \models \psi$
$\mathfrak{I} \models \forall x\varphi$	:gdw	für alle $a \in A$ gilt $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$
$\mathfrak{I} \models \exists x\varphi$	:gdw	es gibt ein $a \in A$ mit $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$.

Relation zwischen einer Interpretation und einem Ausdruck / eine Formel.

Trick mit dem Punkt

z.B. als Struktur $(\mathbb{N}, \leq)$

$S = \{\dot{\leq}\}$ $\quad\dot{\leq}$ zweistelliges Relationssymbol

$\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, \mathfrak{a})$

$\mathfrak{a}$ definiert auf S mit $\mathfrak{a}(\dot{\leq}) = \leq$.

Bspformel

$\exists x \forall y\, (x \dot{\leq} y)$ $\quad \boxed{\exists v_0 \forall v_1 \dot{\leq} v_0 v_1}$

"KURZ" für: $\exists x \forall y \dot{\leq} xy$

LESBAR

$\exists x \forall y \, (x \leq y)$

$\exists x \forall y \, \dot{\leq} xy$

$\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, \leq)$

Sei β beliebig.

$\mathfrak{I} := (\mathfrak{A}, \beta)$

Frage:

gilt $(\mathfrak{A}, \beta) \models \exists x \forall y \, \boxed{\dot{\leq} xy}$?

ATOMAR

3.3.2 Definition der Modellbeziehung Für alle $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ setzen wir:

$\mathfrak{I} \models t_1 \equiv t_2$	:gdw[1]	$\mathfrak{I}(t_1) = \mathfrak{I}(t_2)$
$\mathfrak{I} \models Rt_1 \ldots t_n$	:gdw	$R^{\mathfrak{A}}\mathfrak{I}(t_1) \ldots \mathfrak{I}(t_n)$ (d.h., $R^{\mathfrak{A}}$ trifft zu auf $\mathfrak{I}(t_1), \ldots, \mathfrak{I}(t_n)$)
$\mathfrak{I} \models \neg\varphi$	:gdw	nicht $\mathfrak{I} \models \varphi$
$\mathfrak{I} \models (\varphi \wedge \psi)$	:gdw	$\mathfrak{I} \models \varphi$ und $\mathfrak{I} \models \psi$
$\mathfrak{I} \models (\varphi \vee \psi)$	:gdw	$\mathfrak{I} \models \varphi$ oder $\mathfrak{I} \models \psi$
$\mathfrak{I} \models (\varphi \rightarrow \psi)$	:gdw	wenn $\mathfrak{I} \models \varphi$, so $\mathfrak{I} \models \psi$
$\mathfrak{I} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$	:gdw	$\mathfrak{I} \models \varphi$ genau dann, wenn $\mathfrak{I} \models \psi$
$\mathfrak{I} \models \forall x\varphi$	:gdw	für alle $a \in A$ gilt $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$
$\mathfrak{I} \models \exists x\varphi$	:gdw	es gibt ein $a \in A$ mit $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$.

$(\mathfrak{A}, \beta) \models \dot{\leq} xy \iff \beta(x) \leq \beta(y)$

$(\mathfrak{A}, \beta) \models \forall y \, \dot{\leq} xy \iff$ für $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathfrak{I}\frac{k}{y} \models \dot{\leq} xy$

$\iff \beta\frac{k}{y}(x) \leq \beta\frac{k}{y}(y) = k$

$\iff \beta\frac{k}{y}(x) \leq k$

$\iff$ es ex. l s. d. für alle k $l \leq k$.

$(\mathfrak{A}, \beta) \models \exists x \forall y \, \dot{\leq} xy \iff$ es ex. $l \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{I}\frac{l}{x} \models \forall y \, \dot{\leq} xy$

$\iff$ es ex. l s. d. für alle k $\beta\frac{k}{y}\frac{l}{x}(x) \leq k$, $l \leq k$

Für ein zweites Bsp. betrachten Sie:

$$\forall x \exists y (\underbrace{x < y}_{\le \text{ und } \ne})$$

$$\forall x \exists y (x \le y \wedge x \not\equiv y)$$

$$\forall x \exists y (\dot{\le} xy \wedge \neg x \equiv y) \in L^S$$

für beliebige β

$$(\mathbb{N}, \le, \beta) \models \forall x \exists y (\dot{\le} xy \wedge \neg x \equiv y).$$

Übung für zu Hause.

WICHTIG: x, y sind die einzigen in de Formel vorkommenden Variablen. Sie sind nicht frei. [Also ist die Formel ein Satz] Dadurch sind $\beta(x), \beta(y)$ irrelevant.

BEOBACHTUNG

Falls φ ein Satz ist, so ist β für die Bedeutung von $(\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi$ irrelevant.

2. Bemerkung Das Symbol $<$ kommt nicht in der Sprache vor, kann aber (durch "$\leq$ und $\neq$") definiert werden.

ZIEL

$$\dot{<}xy \iff \underbrace{(\dot{\leq}xy \wedge \neg x \equiv y)}_{S\text{-Formel}}$$

Neues Symbol $\dot{<}$

$$S^* := \{\dot{\leq}, \dot{<}\}$$
$$S = \{\dot{\leq}\}$$

DEFINITIONSERWEITERUNG

Übersetzung φ S^*-Formel $\rightsquigarrow$ $\hat{\varphi}$ S-Formel

$\varphi = t_1 \equiv t_2$: $\hat{\varphi} := \varphi$

$\varphi = \dot{\leq} t_1 t_2$: $\hat{\varphi} := \varphi$

$\varphi = \dot{<} t_1 t_2$: $\hat{\varphi} = (\dot{\leq} t_1 t_2 \wedge \neg t_1 \equiv t_2)$

$\varphi = (\psi \wedge \chi)$ (bzw. $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$) : $\hat{\varphi} = (\hat{\psi} \wedge \hat{\chi})$ (bzw. $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$)

$\varphi = \neg \psi$: $\hat{\varphi} = \neg \hat{\psi}$

$\varphi = \forall x \psi$ (bzw. $\exists$) : $\hat{\varphi} = \forall x \hat{\psi}$ (bzw. $\exists$)

BEOBACHTUNG

Induktionen und Rekursionen über den Formelaufbau haben viele Unterfälle.

Vollst. Induktion

IA $n = 0$

IV ...

IS $n \longmapsto n+1$

Ind. über Termaufbau

IA Var, S_K

IV ...

IS $t_1 \dots t_n \longmapsto f t_1 \dots t_n$

Ind. über Formelaufbau

IA Atomare Formeln

$t_1 \equiv t_2$

$R t_1 \dots t_n$

IV ...

IS $\varphi, \psi \longmapsto$

$(\varphi \wedge \psi)$ $\quad \forall x \varphi$

$(\varphi \vee \psi)$ $\quad \exists x \varphi$

$(\varphi \rightarrow \psi)$

$(\varphi \leftrightarrow \psi)$

$\neg \varphi$

Es wäre gut, diese Rekursionen/Induktionen mit weniger Fällen durchführen zu können.

Was können wir bisher schon tun?

AXIOMATISIERUNGEN von Strukturen

Bsp. Gruppen $S = \{*\}$ wobei $*$ ein zweistelliges Fktsymbol

φ_A^*

φ_{NI}^*

Zwei Axiome.

$$\forall x \forall y \forall z \quad * x \underbrace{* y z}_{x \cdot (y \cdot z)} \equiv * \underbrace{* x y}_{(x \cdot y) \cdot z} z$$

$$\underset{\text{neutrales}}{\exists x} \forall y \underset{\text{inverse zu } y}{\exists z} (((\underbrace{* x y = y}_{1 \cdot y = y} \wedge \underbrace{* y x = y)}_{y \cdot 1 = y}) \wedge \underbrace{* y z = x)}_{y \cdot y^{-1} = 1} \wedge \underbrace{* z y = x}_{y^{-1} y = 1.})$$

$(\varphi_A^* \wedge \varphi_{NI}^*)$

1. Axiome sind nicht eindeutig.
2. Nicht einmal die Sprache ist eindeutig.
   Früher: $S = \{*, e, i\}$
3. Die Zahl der Axiome ist kein sinnvolles Maß

Haben: $\mathfrak{J} \models \varphi$ wobei $\mathfrak{J}$ S-Interpretation

φ S-Ausdruck

DEFINITION

Falls Φ eine Menge von S-Ausdrücken ist, so schreiben wir

FOLGERUNGS-BEZIEHUNG

$$\Phi \models \varphi$$

AUS Φ FOLGT φ (SEMANTISCH)

gdw für alle S-Interpretationen $\mathfrak{J}$ mit $\boxed{\mathfrak{J} \models \psi \text{ für alle } \psi \in \Phi}$ gilt;

$$\mathfrak{J} \models \varphi.$$

KURZSCHREIB-WEISE $\mathfrak{J} \models \Phi$.

Stellen Sie sich vor, daß Φ ein Axiomensystem ist

z.B. $\Phi = \{\varphi_A^*, \varphi_{NI}^*\}$

für alle $\psi \in \Phi$ gilt $\mathfrak{J} \models \psi$

$\Longleftrightarrow$

$\mathfrak{J}$ ist eine Gruppe

Falls $\Phi = \{\varphi_A^*, \varphi_{NI}^*\}$, so gilt $\Phi \models \varphi$ gdw φ in allen Gruppen gilt.

Jetzt haben wir $\Phi \models \varphi$.

Wir nennen eine Formel φ allgemeingültig / Tautologie

falls $\emptyset \models \varphi$

leere Menge!

also:

für alle $\mathfrak{I}$ gilt $\mathfrak{I} \models \varphi$.

$(\varphi \wedge \psi) \models\mid\models \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$

$(\varphi \rightarrow \psi) \models\mid\models \neg\varphi \vee \psi$

DE MORGAN Regel

<u>Bsp.</u> $((\varphi \wedge \psi) \longrightarrow (\psi \wedge \varphi))$

Wir schreiben auch $\varphi \models \psi$ falls $\{\varphi\} \models \psi$ und

dann $\boxed{\varphi \models\mid\models \psi}$ für $\varphi \models \psi$ und $\psi \models \varphi$

φ und ψ sind logisch äquivalent.

Wir haben die folgende logischen Äquivalenzen

$$(\varphi \wedge \psi) \dashv\vDash \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$$

$$(\varphi \rightarrow \psi) \dashv\vDash (\neg\varphi \vee \psi)$$

$$\begin{aligned}(\varphi \leftrightarrow \psi) &\dashv\vDash (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi) \\ &\dashv\vDash ((\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi)) \\ &\dashv\vDash \boxed{\neg(\neg(\neg\varphi \vee \psi) \vee \neg(\neg\psi \vee \varphi))}\end{aligned}$$

$$\forall x \varphi \dashv\vDash \neg \exists x \neg \varphi$$

$\wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall$ zurückführen auf $\neg, \vee, \exists$

Statt die Sprache mit den logischen Symbolen $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg, \forall, \exists$ zu definieren, definieren wir nur $\vee, \neg, \exists$ und betrachten die anderen als Abkürzungen.

Dies verkürzt Induktionen & Rekursionen auf:

IA

$t_1 \equiv t_2$

$Rt_1 \dots t_n$

IS:

$$\varphi, \psi \rightsquigarrow (\varphi \vee \psi)$$

$$\neg\varphi$$

$$\exists x \varphi$$

3.4.6 Koinzidenzlemma *Es sei* $\mathfrak{I}_1 = (\mathfrak{A}_1, \beta_1)$ *eine* S_1*-Interpretation und* $\mathfrak{I}_2 = (\mathfrak{A}_2, \beta_2)$ *eine* S_2*-Interpretation, beide über demselben Träger* $A_1 = A_2$. *Ferner sei* $S := S_1 \cap S_2$.

(a) *Sei t ein S-Term. Wenn* $\mathfrak{I}_1$ *und* $\mathfrak{I}_2$ *für die in t auftretenden Symbole aus S und die in t auftretenden Variablen übereinstimmen*[3], *so ist* $\mathfrak{I}_1(t) = \mathfrak{I}_2(t)$.

(b) *Sei* φ *ein S-Ausdruck. Wenn* $\mathfrak{I}_1$ *und* $\mathfrak{I}_2$ *für die in* φ *auftretenden Symbole aus S und die in* φ *frei auftretenden Variablen übereinstimmen, so gilt:* $\mathfrak{I}_1 \models \varphi$ *gdw* $\mathfrak{I}_2 \models \varphi$.

Falls φ eine S-Formel ist, in der nur die Symbole aus $S' \subsetneq S$ auftauchen, dann hängt

$$\mathfrak{I} \models \varphi$$

nur von dem Teil von $\mathfrak{I}$ ab, der S' verwendet.

S_1 $\quad \mathfrak{I}_1 = (\mathfrak{A}_1, \beta_1) = (A, a_1, \beta_1)$

S_2 $\quad \mathfrak{I}_2 = (\mathfrak{A}_2, \beta_2) = (A, a_2, \beta_2)$ wobei $A = A_1 = A_2$.

$S := S_1 \cap S_2$

Falls für $f \in (S_1)_F \cap (S_2)_F$ ein zweistelliges Fktsymbol

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_1(fxy) &= a_1(f)\,(\beta_1(x), \beta_1(y)) \\ &= a_1(f)\,(\beta_2(x), \beta_2(y)) \\ &= a_2(f)\,(\beta_2(x), \beta_2(y)) = \mathfrak{I}_2(fxy).\end{aligned}$$

Mit dem Koinzidenzlemma erhalten wir nun:

falls φ ein S-Satz ist, so

$$(\mathfrak{A},\beta) \models \varphi \iff (\mathfrak{A},\beta') \models \varphi$$

für alle β,β'.

Wir können also abkürzen: $\boxed{\mathfrak{A} \models \varphi}$ für $\forall \beta\ (\mathfrak{A},\beta) \models \varphi$

falls φ ein Satz ist.

Noch etwas zu kanonischen Strukturen:

WAHRHEIT IST EINE RELATION ZWISCHEN STRUKTUREN & SÄTZEN

Mengen: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

Mengen wie $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ tragen "natürliche Operationen und Relationen" und wir interpretieren $\dot{\leq}$ üblicherweise durch diese.

$$\underline{\mathbb{N}} \models \varphi \qquad \underline{\mathbb{Z}} \models \neg\varphi$$

$$\underline{\mathbb{N}} \models \psi \qquad \underline{\mathbb{Z}} \models \psi$$

Ist das sinnvoll?

$$\boxed{\varphi := \exists x \forall y \dot{\leq} xy}$$

$$\psi := \forall x \exists y (\dot{\leq} xy \wedge \neg x \dot{=} y)$$

Hier fehlt: die Interpretation des Symbols $\dot{\leq}$

$$\mathfrak{a}(\dot{\leq}) := \{(n,m);\ n \geq m\}$$

$\varphi = \exists x \forall y \dot{\leq} xy$ bedeutet nun: "es gibt eine größte natürliche Zahl"

Also $(\mathbb{N}, \mathfrak{a}) \models \neg\varphi$