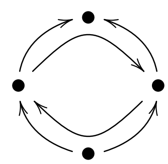
Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2019
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 7

Abgabe am Dienstag, 21. Mai 2019 am Anfang der Übung. Ab Übungblatt #5 geben Sie bitte in Zweiergruppen ab.

(27) Betrachten Sie das folgende Modell $\mathfrak{G} = (G, E)$



und überprüfen Sie, welche der von uns bisher diskutierten Axiome in diesem Modell gelten.

(28) In der Vorlesung hatten wir rekursiv das Modell $\mathfrak{G}_{\text{Paar}} := (G_{\text{Paar}}, E_{\text{Paar}})$ wie folgt definiert: $\mathfrak{G}_0$ war der Graph mit einem Punkt e und ohne Kanten und $\mathfrak{G}_{n+1}$ hatte die Knoten von $\mathfrak{G}_n$ plus zusätzliche Knoten: falls $\{x, y\}$ eine höchstens zweielementige Teilmenge von G_n ist, so ist $p_{x,y} = p_{y,x}$ definiert, falls in $\mathfrak{G}_n$ noch kein Knoten existiert, der exakt die Vorgänger x und y hat. Die Kantenrelation E_{n+1} ist dann definiert als $E_{n+1} := E_n \cup \{(x, p_{x,y})\,;\, x, y \in G_n\}$. Wir definierten $G_{\text{Paar}} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ und $E_{\text{Paar}} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

Für dieses Modell können wir eine Rangfunktion ϱ definieren: $\varrho(x) := \min\{n \in \mathbb{N}\,;\, x \in G_n\}$. Für einen Knoten $x \in G_{\text{Paar}}$ definieren wir die *Spreizung* von x als

$$\operatorname{spr}(x) := \max\{|\varrho(x) - \varrho(z)|\,;\, (z, x) \in E_{\text{Paar}}\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Spreizung ist unbeschränkt, d.h. für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es einen Knoten $x \in G_{\text{Paar}}$ mit $\operatorname{spr}(x) > k$.

(b) Für jeden Knoten $x \in G_{\text{Paar}}$ mit $x \neq e$ gilt $\varrho(x) = \max\{\varrho(z) + 1\,;\, (z, x) \in E_{\text{Paar}}\}$.

(29) Wir geben drei Definitionen von geordneten Paaren:

(a) $(a, b)_{\text{K}} := \{\{a\}, \{a, b\}\}$ heißt das *Kuratowski-Paar* von a und b,

(b) $(a, b)_{\text{vK}} := \{a, \{a, b\}\}$ heißt das *vereinfachte Kuratowski-Paar* von a und b, und

(c) $(a, b)_{\text{H}} := \{\{a, \varnothing\}, \{b, \{\varnothing\}\}\}$ heißt das *Hausdorff-Paar* von a und b.

Wir sagen, daß eine Definition des geordneten Paars $(\cdot,\cdot)_\bullet$ *adäquat über* $\mathfrak{G} := (G, E)$ ist, falls für alle $a, a', b, b' \in G$ gilt, daß

$$(a, b)_\bullet = (a', b')_\bullet \iff a = a' \text{ und } b = b'.$$

(a) Finden Sie eine geeignete Menge T von Axiomen aus unserer obigen Liste, so daß die Definitionen $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{K}}$ und $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{H}}$ adäquat über Modelle von T sind.

(b) Betrachten Sie das Modell $\mathfrak{G} = (G, E)$ aus Aufgabe (27) und finden Sie paarweise verschiedene Knoten a, b und c, so daß $(a, b)_{\mathrm{vK}}$ und $(c, b)_{\mathrm{vK}}$ existieren und $(a, b)_{\mathrm{vK}} = (c, b)_{\mathrm{vK}}$. Folgern Sie, daß $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{vK}}$ nicht adäquat über $\mathfrak{G}$ ist.

(30) Konstruieren Sie ein Graphenmodell, welches (Ext), (Aus), (Einer) und (Ver) erfüllt, aber nicht (Paar) und beweisen Sie diese Behauptung.

(31) Eine Menge I hieß *induktiv*, falls $\varnothing \in I$ und für alle $x \in I$, ist auch $x \cup \{x\} \in I$.

Analog nennen wir eine Menge Z *Zermelo-induktiv* falls $\varnothing \in Z$ und für alle $x \in Z$, ist auch $\{x\} \in Z$. Zeigen Sie:

(a) Falls es eine Zermelo-induktive Menge gibt, so gibt es eine minimale Zermelo-induktive Menge.

(b) Wir bezeichnen die minimale Zermelo-induktive Menge aus (a) mit $\mathbb{N}_{\mathrm{Zermelo}}$. Dann gilt $\bigcup \mathbb{N}_{\mathrm{Zermelo}} = \mathbb{N}_{\mathrm{Zermelo}}$.

(c) Falls $x \in \mathbb{N}_{\mathrm{Zermelo}}$, so gilt $x \notin x$.