Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2019
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 13

Abgabe am Dienstag, 9. Juli 2019 am Anfang der Übung. Ab Übungblatt #5 geben Sie bitte in Zweiergruppen ab.

(54) Zeigen Sie in der Mengenlehre ZF **mit** dem Fundierungsaxiom, daß jede Menge in einem $\mathbf{V}_\alpha$ liegt, also:

$$\forall x \exists \alpha (x \in V_\alpha).$$

Unter Annahme des Fundierungsaxioms können wir also den *Mirimanoff-Rang* einer Menge x durch $\varrho(x) := \min\{\alpha\,;\, x \in \mathbf{V}_{\alpha+1}\}$ definieren. Zeigen Sie, daß für jede Menge x gilt, daß

$$\varrho(x) := \bigcup\{\varrho(y) + 1\,;\, y \in x\}.$$

[*Hinweis.* Überlegen Sie sich zunächst: falls $y \in x$ und $\varrho(x) = \alpha$, dann $\varrho(y) < \alpha$.]

(55) Sei S eine Symbolmenge. Eine *Regel* ist eine Menge von gleichlangen Tupeln von S-Sequenzen; eine *nullstellige Regel* ist eine Menge von Sequenzen, eine *einstellige Regel* ist eine Menge von Paaren von Sequenzen und eine *zweistellige Regel* ist eine Menge von Tripeln von Sequenzen.

Eine Menge $\mathfrak{K}$ von Regeln nennen wir *Kalkül*. Falls $\mathfrak{K}$ ein Kalkül ist, so nennen wir eine endliche Folge von Sequenzen $D = (\Delta_0, \ldots, \Delta_n)$ eine $\mathfrak{K}$-Ableitung, falls für jedes $i \leq n$ eine Regel $\mathbf{R} \in \mathfrak{K}$ existiert, so daß

(a) $\mathbf{R}$ ist eine nullstellige Regel und $\Delta_i \in \mathbf{R}$ oder
(b) $\mathbf{R}$ ist eine einstellige Regel und es gibt ein $j < i$, so daß $(\Delta_j, \Delta_i) \in \mathbf{R}$ oder
(c) $\mathbf{R}$ ist eine zweistellige Regel und es gibt $j, k < i$, so daß $(\Delta_j, \Delta_k, \Delta_i) \in \mathbf{R}$.

Wir nennen eine Sequenz Δ $\mathfrak{K}$-ableitbar, falls eine $\mathfrak{K}$-Ableitung $D = (\Delta_0, \ldots, \Delta_n)$ existiert, so daß $\Delta = \Delta_i$ für ein $i \leq n$. Sei nun Λ eine Menge von S-Formeln und φ eine S-Formel. Wir schreiben $\Lambda \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$ ("Λ beweist φ im Kalkül $\mathfrak{K}$"), falls eine Folge Γ von Elementen von Λ existiert, so daß die Sequenz $\Gamma\varphi$ $\mathfrak{K}$-ableitbar ist. Eine Menge Λ heißt $\mathfrak{K}$-*widersprüchlich*, falls für alle Formeln φ gilt, daß $\Gamma \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$.

Eine n-stellige Regel $\mathbf{R}$ heißt $\mathfrak{K}$-*ableitbar*, falls für jedes Tupel $(\Delta_1, ..., \Delta_n) \in \mathbf{R}$ gilt: falls für jedes $i < n$ die Sequenz Δ_i $\mathfrak{K}$-ableitbar ist, so auch die Sequenz Δ_n.

Ein Kalkül $\mathfrak{K}$ heißt *korrekt*, falls für jede Formelmenge Λ gilt: falls $\Lambda \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$, so $\Lambda \models \varphi$.

Zeigen Sie:

(i) Ein Kalkül $\mathfrak{K}$ ist korrekt, wenn jede Regel in $\mathfrak{K}$ korrekt ist.
(ii) Falls $\Lambda \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$, so existiert eine endliche Teilmenge $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ mit $\Lambda_0 \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$.

(iii) Sei $\mathfrak{K}$ ein Kalkül und $\mathbf{R}$ eine $\mathfrak{K}$-ableitbare Regel. Dann ist eine S-Formel genau dann $\mathfrak{K}$-ableitbar, wenn sie $\mathfrak{K} \cup \{\mathbf{R}\}$-ableitbar ist. (Folgern Sie daraus, daß das Hinzufügen einer ableitbaren Regel zu einem korrekten Kalkül die Korrektheit erhält.)

(iv) Es gibt einen Kalkül $\mathfrak{K}$ und einen S-Satz φ, so daß $\{\varphi, \neg\varphi\}$ nicht $\mathfrak{K}$-widersprüchlich ist. Kann $\mathfrak{K}$ korrekt sein?

(56) Sei $\mathfrak{K}_{\mathrm{Gentzen}}$ der in der Vorlesung definierte Gentzen-Kalkül. Überprüfen Sie, ob die folgenden Regeln $\mathfrak{K}_{\mathrm{Gentzen}}$-ableitbar sind (geben Sie entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel):

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma\varphi_1\psi_1\\ \Gamma\varphi_2\psi_2\end{array}}{\Gamma(\varphi_1 \vee \varphi_2)(\psi_1 \wedge \psi_2)} \qquad \frac{\Gamma\varphi\psi}{\Gamma\neg\psi\neg\varphi}$$

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma(\varphi \to \psi)\\ \Gamma\varphi\end{array}}{\Gamma\psi} \qquad \frac{\Gamma(\varphi \to \neg\varphi)}{\Gamma(\varphi \wedge \neg\varphi)}$$

(57) In der Vorlesung haben wir Beispiele für die Anwendung des Kompaktheitssatzes gesehen: z.B. "falls T eine Theorie ist, die beliebig große endliche Modelle hat, dann hat T ein unendliches Modell". Betrachten Sie die folgenden umgangssprachlichen Aussagen; welche davon sind Anwendungen des Kompaktheitssatzes, welche nicht? Im positiven Fall geben Sie den formalen Beweis unter Annahme des Kompaktheitssatzes; im negativen Fall argumentieren sie, warum so ein Beweis nicht gegeben werden kann.

[Ein *Schiefkörper* erfüllt alle Axiome für Körper bis auf die Kommutativität der Multiplikation. Er ist *kommutativ*, wenn er auch dieses Axiom erfüllt.]

(a) Da es beliebig große endliche kommutative Schiefkörper gibt, gibt es einen unendlichen kommutativen Schiefkörper.

(b) Da es einen unendlichen nichtkommutativen Schiefkörper gibt, gibt es beliebig große endliche nichtkommutative Schiefkörper.

(c) Es gibt keine Formel φ, so daß für jedem nullteilerfreien Ring $\mathbf{R}$ gilt, daß genau dann $\mathbf{R} \models \varphi$, wenn $\mathbf{R}$ endlich ist.

(d) Da es für beliebig große Primzahlen p einen Körper der Charakteristik p gibt, gibt es einen Körper der Charakteristik Null.

(e) Da es für beliebig große Zahlen n eine Gruppe gibt, in der jedes nichtneutrale Element die Ordnung n hat, gibt es eine unendliche Gruppe, in der jedes nichtneutrale Element die Ordnung n hat.