Vertiefung: Algebraische Strukturen
Sommersemester 2018
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 9

Vorlesungswebseite:

`https://www.math.uni-hamburg.de/spag/ml/Lehre/SS18_V_AS.html`

Hausaufgaben werden jeweils in der Übung am Mittwoch abgegeben.

Hausaufgaben zur Abgabe in der Übung am Mittwoch, 13. Juni 2018.

(24) In der Vorlesung hatten wir bewiesen, daß Produkte von Verbänden wieder Verbände sind, indem wir gezeigt hatten, dass für $(a, b), (a', b') \in A \otimes B$ gilt, daß

$$(a, b) \wedge (a', b') := (a \wedge a', b \wedge b')$$

die größte untere Schranke und

$$(a, b) \vee (a', b') := (a \vee a', b \vee b')$$

die kleinste obere Schranke ist.

In Aufgabe (23) hatten wir definiert, daß ein Verband *distributiv* heißt, falls

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \text{ und } a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

gelten.

Zeigen Sie, daß Produkte distributiver Verbände wieder distributiv sind.

(25) In der Vorlesung hatten wir das folgende Lemma formuliert:

Lemma. Seien A und B Verbände und $f : A \to B$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:

(i) f ist ordnungserhaltend,
(ii) für alle $a, a' \in A$ gilt, daß $f(a \vee a') \geq f(a) \vee f(a')$ und
(iii) für alle $a, a' \in A$ gilt, daß $f(a \wedge a') \leq f(a) \wedge f(a')$.

In der Vorlesung hatten wir gezeigt, daß (i) $\iff$ (ii). Zeigen Sie die verbleibenden Richtungen der Äquivalenz.

(26) Ein Verband heißt *vollständig*, wenn jede Teilmenge eine kleinste obere Schranke und eine größte untere Schranke besitzt. Wir hatten gesehen, dass jeder endliche Verband vollständig ist. Welche der folgenden unendlichen Verbände sind vollständig? (Begründen Sie Ihre Antwort.)

(a) Betrachte die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$, geordnet durch die Teilmengenbeziehung $\subseteq$.
(b) Betrachte $\mathbb{Q} \cup \{-\infty, +\infty\}$, die Ordnung der rationalen Zahlen mit zwei zusätzlichen Punkten, ein kleinster Punkt $-\infty$ und ein größter Punkt $+\infty$.
(c) Betrachte $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, die Ordnung der reellen Zahlen mit zwei zusätzlichen Punkten, ein kleinster Punkt $-\infty$ und ein größter Punkt $+\infty$.