

Algebraische Strukturen

Blatt 6

16)

Seien $(X, \leq_x)$ und $(Y, \leq_y)$ partielle Ordnungen mit $X \cap Y = \emptyset$ und

$$\forall z, z' \in X \cup Y: z \leq z' \Leftrightarrow \begin{cases} (z, z' \in X \wedge z \leq_x z') & (1) \\ \vee (z, z' \in Y \wedge z \leq_y z') & (2) \\ \vee (z \in X \wedge z' \in Y) & (3) \end{cases}$$

(a)

Beh.: Falls $(X, \leq_x)$ ein kleinstes Element hat, so hat $(X, \leq_x) \oplus (Y, \leq_y)$ ein kleinstes Element.

Bew.:

Sei $x \in X$ kleinstes Element von $(X, \leq_x)$. ✓

Dann gilt: $\forall z \in X: x \leq_x z$.

z.zg.: $\forall z \in X \cup Y: x \leq z$

1. Fall: $z \in X$

Dann gilt $x \leq_x z \xrightarrow{(1)} x \leq z$. ✓

2. Fall: $z \in Y$

Dann: $x \in X \wedge z \in Y$

$\xrightarrow{(3)} x \leq z$

□ ✓ sehr schön

(b)

Beh.: Falls $(Y, \leq_y)$ ein größtes Element hat, so hat $(X, \leq_x) \oplus (Y, \leq_y)$ ein größtes Element.

Bew.: Sei $y \in Y$ größtes Element von $(Y, \leq_y)$. ✓

Dann gilt: $\forall z \in Y: z \leq_y y$.

z.zg.: $\forall z \in X \cup Y: z \leq y$

1. Fall: $z \in X$

Dann gilt: $z \in X \wedge y \in Y \xrightarrow{(3)} z \leq y$ ✓

2. Fall: $z \in Y$

Dann gilt: $z \leq_y y \xrightarrow{(2)} z \leq y$

□ ✓

17

(a)

Beh.: Die Funktion $f_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ ist nicht ordnungserhaltend.
 $n \mapsto 2-n$

Bew.: z.zg.: $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}: n_1 \leq n_2 \wedge \neg(f_1(n_1) \leq f_1(n_2))$

Seien $n_1 = 2$ und $n_2 = 5$.

Dann gilt $n_1 = 2 \leq 5 = n_2$ und $f_1(n_1) = 0 > -3 = f_1(n_2)$ $\checkmark$
 $\square$

Das Bild $f_1(\mathbb{N}) = \{z \in \mathbb{Z}: z \leq 1\}$ $\checkmark$ hat das Supremum $s_1 = 1$,
 da $\text{os}(f_1(\mathbb{N})) = \{x \in \mathbb{Z}: x \geq 1\}$ mit kleinstem Element 1.

Das Bild hat kein Infimum, da es nach unten nicht beschränkt ist. $\checkmark$

(b)

Beh.: Die Funktion $f_2: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist nicht ordnungserhaltend.
 $z \mapsto \begin{cases} 2z & z \geq 0 \\ -2z+1 & z < 0 \end{cases}$

Bew.: z.zg.: $\exists z_1, z_2 \in \mathbb{Z}: z_1 \leq z_2 \wedge \neg(f_2(z_1) \leq f_2(z_2))$

Seien $z_1 = -1$ und $z_2 = 0$.

Dann gilt: $z_1 = -1 \leq 0 = z_2$ und $f_2(z_1) = 3 > 0 = f_2(z_2)$ $\checkmark$
 $\square$

Das Bild $f_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}_0 \setminus \{1\}$ $\checkmark$ hat das Infimum $i_2 = 0$, da
 $\text{us}(f_2(\mathbb{Z})) = \{z \in \mathbb{Z}: z < 0\}$ mit größtem Element 0. $\checkmark$

Das Bild hat kein Supremum, da es nach oben nicht beschränkt ist. $\checkmark$

(c)

Beh.: Die Funktion $f_3: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ ist nicht ordnungserhaltend.
 $x \mapsto x^2 + x^2$

Bew.: z.zg.: $\exists q_1, q_2 \in \mathbb{Q}: q_1 \leq q_2 \wedge \neg(f_3(q_1) \leq f_3(q_2))$

Seien $q_1 = -\frac{1}{2}$ und $q_2 = 0$.

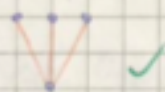
Dann gilt: $q_1 = -\frac{1}{2} \leq 0 = q_2$ und

$f_3(q_1) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8} > 0 = f_3(q_2)$ $\checkmark$
 $\square$

Das Bild $f_3(\mathbb{Q}) = \{x^3 + x^2 : x \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}$ hat kein Infimum und kein Supremum, da es nicht beschränkt ist. ✓

18

(a) $P_1 := 1 \oplus \overline{3}$



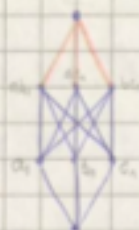
✓

(b) $P_2 := P_1 \oplus \overline{3}$



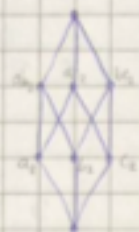
✓

(c) $P_3 := P_2 \oplus 1$



✓

Potenzmengenalgebra P_4



(P_3, R_1) ist nicht isomorph zu (P_4, R_2) , denn es gilt

$a_1 R_1 ab_1 \wedge a_1 R_1 ac_1 \wedge a_1 R_1 bc_1$, aber

$a_2 R_2 ab_2 \wedge a_2 R_2 ac_2 \wedge \neg(a_2 R_2 bc_2)$. ✓