Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Vertiefung: Algebraische Strukturen
Sommersemester 2018
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 6

Vorlesungswebseite:

`https://www.math.uni-hamburg.de/spag/ml/Lehre/SS18_V_AS.html`

Hausaufgaben werden jeweils in der Übung am Mittwoch abgegeben.

Hausaufgaben zur Abgabe in der Übung am Mittwoch, 16. Mai 2018.

(16) Seien $(X, \leq_X)$ und $(Y, \leq_Y)$ partielle Ordnungen mit $X \cap Y = \varnothing$. In der Vorlesung hatten wir die *Summe von* X *und* Y mit der Relation

$$\begin{aligned} z \leq z' :\Longleftrightarrow\ & (z, z' \in X \text{ und } z \leq_X z') \text{ oder} \\ & (z, z' \in Y \text{ und } z \leq_Y z') \text{ oder} \\ & (z \in X \text{ und } z' \in Y) \end{aligned}$$

eingeführt und schreiben $X \oplus Y$ oder genauer $(X, \leq_X) \oplus (Y, \leq_Y)$ für diese Ordnung. Beweisen Sie:

(a) Falls $(X, \leq_X)$ ein kleinstes Element hat, so hat $(X, \leq_X) \oplus (Y, \leq_Y)$ ein kleinstes Element.

(b) Falls $(Y, \leq_Y)$ ein größtes Element hat, so hat $(X, \leq_X) \oplus (Y, \leq_Y)$ ein größtes Element.

(17) Betrachten Sie die folgenden mathematischen Strukturen mit ihren natürlichen Ordnungen: die natürlichen Zahlen $(\mathbb{N}, \leq)$, die ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, \leq)$ und die rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, \leq)$. Wir geben im folgenden drei Funktionen zwischen diesen Strukturen an. Überprüfen Sie für jede dieser Funktionen, ob die Funktion ordnungserhaltend ist und bestimmen Sie das Bild der Funktion. Geben Sie an, ob das Bild der Funktion größte untere und/oder kleinste obere Schranken hat. Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} : n \mapsto 2 - n$;

(b) $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ definiert durch

$$z \mapsto \begin{cases} 2z & \text{falls } z \text{ nicht negativ ist und} \\ -2z + 1 & \text{falls } z \text{ negativ ist;} \end{cases}$$

(c) $f_3 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} : x \mapsto x^3 + x^2$.

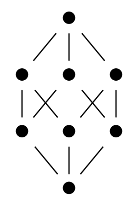
(18) Wir hatten in der Vorlesung die partiellen Ordnungen $\mathbf{1}$ und $\overline{\mathbf{3}}$ als die Kette der Länge eins und die Antikette der Länge drei definiert. Zeichnen Sie die Hasse Diagramme der folgenden Ordnungen:

(a) $P_1 := \mathbf{1} \oplus \overline{\mathbf{3}}$;

(b) $P_2 := P_1 \oplus \overline{\mathbf{3}}$;

(c) $P_3 := P_2 \oplus \mathbf{1}$.

Vergleichen Sie die Ordnung P_3 mit der Potenzmengenalgebra für eine dreielementige Menge



und finden Sie heraus (mit Begründung), ob diese beiden Ordnungen isomorph sind.