## Aufgabe (29)

Wir überlegen uns, wie wir Elemente zuordnen. Grundsätzlich ist

$$f : \mathbb{N} = X \longrightarrow \mathbb{N} = Y;$$
$$n \longmapsto 2n$$

und

$$f : \mathbb{N} = Y \longrightarrow \mathbb{N} = X;$$
$$m \longmapsto 3m.$$

Wir wollen nun $X_1, X_2, Y_1$ und $Y_2$ finden, sodass $Y_1 = f[X_1]$ und $X_2 = g[Y_2]$. Da $f[X] \subseteq \{\text{gerade Zahlen}\}$ gilt natürlich $\{\text{ungerade Zahlen}\} \subseteq Y_2$ genau so gilt

$$\{\text{Zahlen, die nicht durch 3 teilbar sind}\} \subseteq X_1.$$

Nun müssen wir noch die restlichen Zahlen zuordnen. In $X$ alle durch 3 teilbaren, in $Y$ alle geraden Zahlen (also alle durch zwei teilbaren).

- Für $x \in X = \mathbb{N}$ mit $\exists m \in \mathbb{N} : x = 3m$:
  - Falls $m \in Y_1$, so ist $x \in X_1$
  - Falls $m \in Y_2$, so ist $x \in X_2$
- Für $y \in Y = \mathbb{N}$ mit $\exists n \in \mathbb{N} : y = 2n$:
  - Falls $n \in X_1$, so ist $y \in Y_1$
  - Falls $n \in X_2$, so ist $y \in Y_2$

Da $1 \in X_1, 1 \in Y_2$ bereits zugeordnet ist und $f, g$ streng monoton steigend sind, lassen sich so rekursiv $X_1, X_2, Y_1$ und $Y_2$ bestimmen. Für die in der Aufgabe gesuchten Zahlen genügt es, $1, \ldots, 9$ zuzuordnen:

$$\begin{aligned} X_1 \cap \{1, \ldots, 9\} &= \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\} \\ X_2 \cap \{1, \ldots, 9\} &= \{3, 9\} \\ Y_1 \cap \{1, \ldots, 9\} &= \{2, 4, 8\} \\ Y_2 \cap \{1, \ldots, 9\} &= \{1, 3, 5, 6, 7, 9\} \end{aligned}$$

30)

a) Distributiver Verband:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

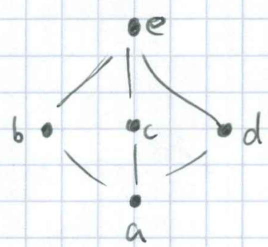
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

$$
\begin{aligned}
& a \wedge (b \vee (a \wedge c)) && \text{Distributiv.} \\
\Leftrightarrow\ & a \wedge ((b \vee a) \wedge (b \vee c)) && \text{Kommutativ} \\
\Leftrightarrow\ & a \wedge ((a \vee b) \wedge (b \vee c)) && \text{Idempotenz} \\
\Leftrightarrow\ & (a \vee a) \wedge ((a \vee b) \wedge (b \vee c)) && \text{Distributiv} \\
\Leftrightarrow\ & a \vee (a \wedge b) \wedge (b \vee c) && \text{Absorbtion} \\
\Leftrightarrow\ & a \wedge (b \vee c) && \text{Distributiv.} \\
\Leftrightarrow\ & (a \wedge b) \vee (a \wedge c)
\end{aligned}
$$

Hier fehlt ein Zwischenschritt (Assoziativität)

✓

b) Verband $M_3$




Wir müssen nur 4 Fälle untersuchen, da alle weiteren isomorph sind.

$(c,b,e)$

$$
\begin{aligned}
(c \wedge b) \vee (c \wedge e) &= c \wedge (b \vee (c \wedge e)) \\
a \vee c &= c \wedge (b \vee c) \\
c &= c \wedge e \\
c &= c \quad ✓
\end{aligned}
$$

$(a,b,e)$

$$
\begin{aligned}
(a \wedge b) \vee (a \wedge e) &= a \wedge (b \vee (e \wedge a)) \\
a \vee a &= a \wedge b \\
a &= a \quad ✓
\end{aligned}
$$

$(b,c,d)$

$$
\begin{aligned}
(b \wedge c) \vee (b \wedge d) &= b \wedge (c \vee (b \wedge d)) \\
a &= a \quad ✓
\end{aligned}
$$

Klar, dass es keinen Unterschied macht, ob $(b,a,c)$ oder $(d,a,c)$. Aber wieso ist es das Gleiche wie $(b,c,a)$ oder $(c,b,a)$?

$(b,a,c)$

$$
\begin{aligned}
(b \wedge a) \vee (b \wedge c) &= b \wedge (a \vee (b \wedge c)) \\
a &= a \quad ✓
\end{aligned}
$$

✓