Vertiefung: Algebraische Strukturen
Sommersemester 2018
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 11

Vorlesungswebseite:

`https://www.math.uni-hamburg.de/spag/ml/Lehre/SS18_V_AS.html`

Hausaufgaben werden jeweils in der Übung am Mittwoch abgegeben.

Hausaufgaben zur Abgabe in der Übung am Mittwoch, 27. Juni 2018.

(29) Der *Banachsche Zerlegungssatz* besagt, daß es für beliebige Mengen X und Y und beliebige Funktionen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ disjunkte Zerlegungen $X = X_1 \cup X_2$ und $Y = Y_1 \cup Y_2$ gibt, so daß $Y_1 = f[X_1]$ und $X_2 = g[Y_2]$.

Betrachten Sie das folgende konkrete Beispiel: $X = Y = \mathbb{N}$, $f(n) := 2n$ und $g(n) := 3n$. Nach dem Banachschen Zerlegungsatz gibt es also solche disjunkte Zerlegungen $\mathbb{N} = X_1 \cup X_2$ und $\mathbb{N} = Y_1 \cup Y_2$. Was können Sie über diese Mengen herausfinden? Argumentieren Sie, daß

$$4 \in X_1,\ 6 \in X_1,\ 9 \in X_2,\ 12 \in X_1 \text{ und } 27 \in X_2,$$

sowie

$$6 \in Y_2,\ 9 \in Y_2,\ 12 \in Y_1,\ 16 \in Y_1 \text{ und } 18 \in Y_2$$

sind. Können Sie einen allgemeinen Algorithmus angeben, der Ihnen für jede natürliche Zahl entscheidet, ob Sie in X_1 oder X_2 bzw. in Y_1 oder Y_2 liegt (und somit die Mengen X_1, X_2, Y_1 und Y_2 eindeutig bestimmt)?

(30) Wir nennen einen Verband *modular*, falls er die folgende Gleichung erfüllt:

$$a \wedge (b \vee (a \wedge c)) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

(a) Zeigen Sie, daß jeder distributive Verband (s. Aufgabe (23)) modular ist.

(b) In Aufgabe (23) hatten Sie gesehen, daß der Verband $\mathbf{M}_3$ nicht distributiv ist. Zeigen Sie, daß er modular ist. [Das bedeutet, daß die Umkehrung von (a) nicht gilt.]