Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2018
Prof. Dr. Benedikt Löwe

Musterklausur

18. Juli 2018, 13:00-15:00

Name:

Matrikelnummer:

Die Klausur dauert 120 Minuten (von 13:00 s.t. bis 15:00).

Es gibt insgesamt 100 Punkte in der Klausur; 50 Punkte sind ausreichend, um die Klausur zu bestehen.

Wenn Sie im Beweis Theoreme aus der Vorlesung verwenden, zitieren Sie bitte die Aussage der Theoreme präzise ohne Beweis: z.B. „Im folgenden verwenden wir den Satz von Cantor-Schröder-Bernstein: falls $A \preceq B$ und $B \preceq A$, so gilt $A \sim B$“.

Frage 1.	(20 Punkte)	**Frage 4.**	(20 Punkte)
Frage 2.	(20 Punkte)	**Frage 5.**	(20 Punkte)
Frage 3.	(20 Punkte)	***GESAMT***	(100 Punkte)
		NOTE	

Frage 1. *Syntax der Prädikatenlogik erster Stufe.*

Der in der Vorlesung definierte *Gentzen-Kalkül* besteht aus den folgenden zehn Regeln: Abschwächungsregel, Voraussetzungsregel, Reflexivitätsregel, Substitutionsregel, Widerspruchsregel, Fallunterscheidungsregel, $\vee$-Einführungsregel im Antezedens, $\vee$-Einführungsregel im Sukzedens, $\exists$-Einführungsregel im Antezedens und $\exists$-Einführungsregel im Sukzedens.

Wählen Sie fünf Regeln R_1, R_2, R_3, R_4 und R_5 aus dieser Liste aus, so daß der Kalkül $\mathfrak{K} := \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\}$ die folgenden Eigenschaften hat:

(1) Falls $\Gamma\varphi$ und $\Gamma\varphi\psi$ $\mathfrak{K}$-ableitbar sind, so auch $\Gamma\psi$.

(2) Falls $\Gamma(\neg\varphi \vee \psi)$ und $\Gamma\varphi$ $\mathfrak{K}$-ableitbar sind, so auch $\Gamma\psi$.

Aufgabe.

(i) Formulieren Sie die fünf von Ihnen gewählten Regeln mathematisch präzise.

(ii) Beweisen Sie, daß der von Ihnen gewählte Kalkül die Eigenschaften (1) und (2) hat.

Frage 2. *Semantik der Prädikatenlogik erster Stufe.*

Im folgenden erhalten Sie jeweils eine Symbolmenge S und zwei S-Strukturen, die nicht elementar äquivalent sind. In jedem Fall geben Sie einen S-Satz an, der in einer der beiden Strukturen gilt und in der anderen nicht.

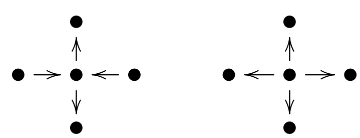
(i) $S = \{\dot{<}\}$, $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, <)$, $\mathfrak{B} = (\mathbb{Z}, <)$, wobei $<$ jeweils die natürliche Ordnung bezeichnet.

(ii) $S = \{\dot{<}\}$, $\mathfrak{A} = (\mathbb{Z}, <)$, $\mathfrak{B} = (\mathbb{Q}, <)$, wobei $<$ jeweils die natürliche Ordnung bezeichnet.

(iii) $S = \{\dot{+}, \dot{\cdot}, \dot{0}, \dot{1}\}$, $\mathfrak{A} = (\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$, $\mathfrak{B} = (\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$, wobei $+$ und $\cdot$ die natürlichen Operationen bezeichnen.

(iv) $S = \{\dot{+}, \dot{0}\}$, $\mathfrak{A} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, 0)$, $\mathfrak{B} = (\mathbb{Z}, +, 0)$, wobei $+$ jeweils die üblichen Gruppenoperationen beschreibt.

(v) $S = \{\dot{E}\}$ mit einem zweistelligen Relationssymbol, $\mathfrak{A} = (A, E)$ und $\mathfrak{B} = (B, E)$ sind die durch die folgenden Bilder angegebenen gerichteten Graphen (die Beziehung xEy wird durch einen Pfeil von x nach y dargestellt):



$\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$

Frage 3. *Axiome der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre.*

(i) Definieren Sie die *von Neumann-Hierarchie* $\mathbf{V}_\alpha$.

(ii) Beweisen Sie unter Verwendung des Regularitätsaxioms, daß jede Menge in einem $\mathbf{V}_\alpha$ liegt.

Sei nun $(M, E) \models \mathsf{ZFC}$. Für eine M-Klasse $C \subseteq M$ und ein Element $x \in M$ sagen wir, daß C und x *koextensional* sind, falls $C = \{z \in M\,;\, zEx\}$. Eine M-Klasse C heißt *echte Klasse*, falls es kein Element x von M gibt, so daß C und x koextensional sind.

(iii) Betrachten Sie die folgenden informell beschriebenen M-Klassen und geben Sie für jede an (mit kurzer Begründung), ob sie eine echte Klasse ist oder nicht:

(a) $\{x \in M\ ;\ x$ ist eine nichtleere Menge von natürlichen Zahlen$\}$,

(b) $\{x \in M\ ;\ x$ ist eine endliche Menge von reellen Zahlen$\}$,

(c) $\{x \in M\ ;\ x$ ist eine einelementige Menge von rationalen Zahlen$\}$ und

(d) $\{x \in M\ ;\ x$ ist eine zweielementige Teilmenge eines $\mathbb{R}$-Vektorraums$\}$.

Frage 4. *Ordinalzahlen & Kardinalzahlen.*

(i) Formulieren Sie den Satz über die Cantor-Normalform mathematisch präzise.

Eine Ordinalzahl γ heißt *Gammazahl*, falls für alle $\alpha, \beta \in \gamma$ gilt, daß $\alpha + \beta \in \gamma$.

(ii) Zeigen Sie: eine Ordinalzahl γ ist eine Gammazahl genau dann, wenn ein ξ existiert, so daß $\gamma = \omega^{\xi}$.

(iii) Zeigen Sie: für jede Ordinalzahl ξ gibt es eine Gammazahl $\gamma > \xi$.

(iv) Welche der folgenden Zahlen sind Gammazahlen? (Geben Sie eine kurze Begründung für jede Antwort.)

  (a) $\omega_1 + \omega_2$,

  (b) $\omega^{\omega} + \omega^{\omega+\omega}$,

  (c) $\omega^{17} + \omega$,

Frage 5. *Das Auswahlaxiom.*

(i) Formulieren Sie das Zornsche Lemma mathematisch präzise und geben Sie Definitionen der darin vorkommenden Begriffe “Kette”, “kettenvollständig” und “maximales Element”.

(ii) Beweisen Sie das Zornsche Lemma unter Annahme des Auswahlaxioms.