Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2018
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 8

`http://www.math.uni-hamburg.de/spag/ml/Lehre/SS18_WP24.html`

Abgabe am Mittwoch, 6. Juni 2018 am Anfang der Übung.

(27) Sei X eine Menge, so daß eine Injektion $f : \mathbb{N} \to X$ existiert. Zeigen Sie, daß X Dedekind-unendlich ist.

(28) Falls $\mathbf{L}_0 = (L_0, \leq_0)$ und $\mathbf{L}_1 = (L_1, \leq_1)$ totale Ordnungen sind, so hatten wir die Summe $\mathbf{L}_0 \oplus \mathbf{L}_1 := (S, \leq_\oplus)$ und das Produkt $\mathbf{L}_0 \otimes \mathbf{L}_1 := (P, \leq_\otimes)$ wie folgt definiert: $S := (\{0\} \times L_0) \cup (\{1\} \times L_1)$ und $P := L_0 \times L_1$, sowie

$$\begin{aligned}
(i, \ell) \leq_\oplus (j, \ell') \iff & \; i < j \text{ oder} \\
& (i = j = 0 \text{ und } \ell \leq_0 \ell') \text{ oder} \\
& (i = j = 1 \text{ und } \ell \leq_1 \ell') \text{ und} \\
(\ell_0, \ell_1) \leq_\otimes (\ell_0', \ell_1') \iff & \; \ell_1 <_1 \ell_1' \text{ oder} \\
& (\ell_1 = \ell_1' \text{ und } \ell_0 \leq_0 \ell_0').
\end{aligned}$$

Zeigen Sie: falls $\mathbf{L}_0$ und $\mathbf{L}_1$ Wohlordnungen sind, so sind auch die Summe $\mathbf{L}_0 \oplus \mathbf{L}_1$ und das Produkt $\mathbf{L}_0 \otimes \mathbf{L}_1$ Wohlordnungen.

(29) Falls Ers das Axiomenschema der Ersetzung ist und Aus das Axiomenschema der Aussonderung, zeigen Sie, daß $\mathsf{Ers} \models \mathsf{Aus}$.

(30) Wir verwenden im folgenden die Operationen $\oplus$ und $\otimes$ aus Aufgabe (28) und die lineare Ordnung $\mathbf{N} := (\mathbb{N}, \leq)$. Üblicherweise verwenden wir in der Mathematik informelle Konstruktionen wie "Sei C der Abschluß von $\mathbf{N}$ unter Summen" (soll heissen: $\mathbf{N} \in C$ und falls $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in C$, so auch $\mathbf{P} \oplus \mathbf{Q}$ und C ist minimal mit dieser Eigenschaft).

Machen Sie diese Konstruktion präzise, indem Sie in der Mengenlehre ZF die Menge C konstruieren (unter genauer Angabe der verwendeten Axiome).

Zeigen Sie danach, daß es keine Ordnung $(P, \leq)$ in C gibt, welche isomorph zu $\mathbf{N} \otimes \mathbf{N}$ ist.