Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2018
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 5

http://www.math.uni-hamburg.de/spag/ml/Lehre/SS18_WP24.html

Abgabe am Mittwoch, 9. Mai 2018 am Anfang der Übung.
Unsere bisherigen Axiome:

$$\forall x \forall y (x = y \leftrightarrow (\forall z (y \in x \leftrightarrow z \in y))), \tag{Ext}$$

$$\exists \ell \forall z (z \notin \ell), \tag{Leer}$$

$$\forall x \exists s \forall z (z \in s \leftrightarrow z = x), \tag{Einer}$$

$$\forall x \forall y \exists p \forall z (z \in p \leftrightarrow (z = x \vee z = y)), \tag{Paar}$$

$$\forall x \forall y \exists u \forall z (z \in u \leftrightarrow (z \in x \vee z \in y)), \tag{BinVer}$$

$$\forall x \exists u \forall z (z \in u \leftrightarrow \exists y (y \in x \wedge z \in y), \tag{Ver}$$

$$\forall x \forall p_1 \ldots \forall p_n \exists s \forall z (z \in s \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z, p_1, ..., p_n)) \tag{Aus$_\varphi$}$$

und (Aus) ist die Menge $\{(\text{Aus}_\varphi)\,;\, \varphi \in L^{\{\in\}}\}$.

(17) Betrachten Sie die Axiomensysteme

$$\begin{aligned} T_0 &:= (\text{Ext})+(\text{Aus}), \\ T_1 &:= T_0 + (\text{Ver})+(\text{Paar}), \\ T_2 &:= T_0 + (\text{Einer})+(\text{BinVer}) \end{aligned}$$

und zeigen Sie:

(a) T_1 impliziert logisch T_2 und
(b) T_2 impliziert logisch (Paar).

(18) In der Vorlesung hatten wir rekursiv das Modell $\mathfrak{G}_{\text{Paar}} := (G_{\text{Paar}}, E_{\text{Paar}})$ wie folgt definiert: $\mathfrak{G}_0$ war der Graph mit einem Punkt e und ohne Kanten und $\mathfrak{G}_{n+1}$ hatte die Knoten von $\mathfrak{G}_n$ plus zusätzliche Knoten: falls $\{x, y\}$ eine höchstens zweielementige Teilmenge von G_n ist, so ist $p_{x,y} = p_{y,x}$ definiert, falls in $\mathfrak{G}_n$ noch kein Knoten existiert, der exakt die Vorgänger x und y hat. Die Kantenrelation E_{n+1} ist dann definiert als $E_{n+1} := E_n \cup \{(x, p_{x,y})\,;\, x, y \in G_n\}$. Wir definierten $G_{\text{Paar}} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ und $E_{\text{Paar}} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

Für dieses Modell können wir eine Rangfunktion ϱ definieren: $\varrho(x) := \min\{n \in \mathbb{N}\,;\, x \in G_n\}$. Für einen Knoten $x \in G_{\text{Paar}}$ definieren wir die *Spreizung* von x als

$$\text{spr}(x) := \max\{|\varrho(x) - \varrho(z)|\,;\, (z, x) \in E_{\text{Paar}}\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Spreizung ist unbeschränkt, d.h. für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es einen Knoten $x \in G_{\mathrm{Paar}}$ mit $\mathrm{spr}(x) > k$.

(b) Für jeden Knoten $x \in G_{\mathrm{Paar}}$ mit $x \neq e$ gilt $\varrho(x) = \max\{\varrho(z) + 1\,;\, (z,x) \in E_{\mathrm{Paar}}\}$.

(19) Wir geben drei Definitionen von geordneten Paaren:

(a) $(a,b)_{\mathrm{K}} := \{\{a\},\{a,b\}\}$ heißt das *Kuratowski-Paar* von a und b,

(b) $(a,b)_{\mathrm{vK}} := \{a,\{a,b\}\}$ heißt das *vereinfachte Kuratowski-Paar* von a und b, und

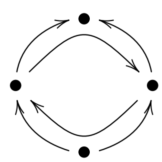
(c) $(a,b)_{\mathrm{H}} := \{\{a,\varnothing\},\{b,\{\varnothing\}\}\}$ heißt das *Hausdorff-Paar* von a und b.

Wir sagen, daß eine Definition des geordneten Paars $(\cdot,\cdot)_\bullet$ *adäquat über* $\mathfrak{G} := (G,E)$ ist, falls für alle $a,a',b,b' \in G$ gilt, daß

$$(a,b)_\bullet = (a',b')_\bullet \iff a = a' \text{ und } b = b'.$$

(a) Finden Sie eine geeignete Menge T von Axiomen aus unserer obigen Liste, so daß die Definitionen $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{K}}$ und $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{H}}$ adäquat über Modelle von T sind.

(b) Betrachten Sie das folgende Modell $\mathfrak{G} = (G,E)$



und finden Sie paarweise verschiedene Knoten a, b und c, so daß $(a,b)_{\mathrm{vK}}$ und $(c,b)_{\mathrm{vK}}$ existieren und $(a,b)_{\mathrm{vK}} = (c,b)_{\mathrm{vK}}$. Folgern Sie, daß $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{vK}}$ nicht adäquat über $\mathfrak{G}$ ist.

(c) Das Modell $\mathfrak{G}$ erfüllt (Ext), aber nicht (Paar) und (Aus). Erweitern Sie $\mathfrak{G}$ zu einem Modell von (Ext), (Aus) und (Paar), welches $\mathfrak{G}$ als Untergraphen enthält und somit immer noch bezeugt, daß $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{vK}}$ nicht adäquat für dieses Modell ist.