Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2018
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 3

Abgabe am Mittwoch, 25. April 2017 am Anfang der Übung.

(9) Das *Koinzidenzlemma* besagt:

> Seien S_1 und S_2 Symbolmengen mit $S := S_1 \cap S_2$, $\mathfrak{A}_1 = (A, \iota_1)$ eine S_1-Struktur und $\mathfrak{A}_2 = (A, \iota_2)$ eine S_2-Struktur mit derselben Menge A und seien β_1 und β_2 Belegungen. Setze $\mathfrak{I}_1 := (\mathfrak{A}_1, \beta_1)$ und $\mathfrak{I}_2 := (\mathfrak{A}_2, \beta_2)$.
>
> (a) Sei t ein S-Term, so daß die Werte von ι_1 und ι_2 auf allen in t vorkommenden S-Symbolen sowie β_1 und β_2 auf allen in t vorkommenden Variablen übereinstimmen. Dann gilt $\mathfrak{I}_1(t) = \mathfrak{I}_2(t)$.
>
> (b) Sei φ eine S-Formel, so daß die Werte von ι_1 und ι_2 auf allen in φ vorkommenden S-Symbolen und die Werte von β_1 und β_2 auf allen in φ frei vorkommenden Variablen übereinstimmen. Dann gilt $\mathfrak{I}_1 \models \varphi$ genau dann, wenn $\mathfrak{I}_2 \models \varphi$.

Beweisen Sie das Koinzidenzlemma durch Induktionen über Term- und Formelaufbau.

(10) Sei S eine Symbolmenge. Eine S-Formel heißt *quantorenfrei*, wenn sie eine Formelableitung hat, welche die Regeln (F8) und (F9) nicht verwendet (vgl. die Liste der Ableitungsregeln auf Übungsblatt #2). Inspizieren Sie Ihren Beweis des Koinzidenzlemmas aus Aufgabe (9), insbesondere, welche der Voraussetzungen in welchem Schritt der Induktion verwendet wurden. Formulieren Sie mit den gewonnenen Erkenntnissen ein *Koinzidenzlemma für quantorenfreie Formeln*, welches für quantorenfreie Formeln die gleiche Konklusion liefert, aber schwächere Voraussetzungen hat.

(11) Sei S eine Symbolmenge. Eine Klasse $\mathcal{C}$ von S-Strukturen heißt *S-axiomatisierbar*, wenn es eine Menge Γ von S-Sätzen gibt, so daß für jede S-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt, daß $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ genau dann, wenn $\mathfrak{A} \models \Gamma$. Zeigen Sie, daß die folgenden Klassen für $S = S_{\mathrm{Gr}}$, die Symbolmenge der Gruppentheorie, axiomatisierbar sind:

(a) die Klasse aller abelschen Gruppen,
(b) die Klasse aller sechselementigen Gruppen, und
(c) die Klasse aller unendlichen Gruppen.

(12) Sei $S = S_{\mathrm{R}} = \{\dot{R}\}$ die Symbolmenge mit einem binären Relationssymbol. Wir sagen, daß ein Paar (X, E) eine *nichttriviale Äquivalenzstruktur* ist, falls E eine Äquivalenzrelation auf X ist, so daß alle Äquivalenzklassen unendlich sind.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß die Klasse aller nichttrivialen Äquivalenzstrukturen mit exakt n Äquivalenzklassen axiomatisierbar ist.
(b) Definieren Sie Relationen E_1, E_2 und E_3 auf $\mathbb{R}$, so daß $(\mathbb{R}, E_1)$, $(\mathbb{R}, E_2)$ und $(\mathbb{R}, E_3)$ nichttriviale Äquivalenzstrukturen mit exakt drei Äquivalenzklassen sind, die paarweise nicht-isomorph als S-Strukturen sind.