Universität Hamburg

DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2018
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 1

Abgabe am Mittwoch, 11. April 2017 am Anfang der Übung.

Die Klausur der Vorlesung *Vertiefung Mengenlehre* wird am 18. Juli 2017 stattfinden. Um zur Klausur zugelassen zu werden, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

(a) schriftliche Bearbeitung von mindestens der Hälfte der Übungsaufgaben;

(b) regelmäßige Anwesenheit und aktive Teilnehme in der Übungsgruppe (aktive Teilnahme beinhaltet Vorrechnen an der Tafel).

---

(1) In der folgenden Aufgabe arbeiten Sie informell unter Annahme des Komprehensionsprinzips: *falls Φ eine Eigenschaft ist, so gibt es eine Menge aller Mengen mit Eigenschaft Φ.* Zeigen Sie, dass es

(a) eine Menge aller Mengen,

(b) eine Menge aller einelementigen Mengen und

(c) eine Menge aller zweielementigen Mengen

gibt, indem Sie eine Formel Φ in einer geeigneten erststufigen Sprache für die entsprechende Eigenschaft angeben.

(2) Sei $S = S_{\mathrm{R}} \cup S_{\mathrm{F}} \cup S_{\mathrm{K}}$ die Symbolmenge mit $S_{\mathrm{R}} := \{\dot{R}\}$, $S_{\mathrm{F}} := \{\dot{f}\}$ und $S_{\mathrm{K}} := \{\dot{c}\}$. Sei σ die Signatur mit $\sigma(\dot{R}) = \sigma(\dot{f}) = 2$. In der folgenden Liste von Zeichenketten, identifizieren Sie, welche Zeichenketten S-Terme und S-Formeln sind. Unter den Zeichenketten, die keine S-Terme oder S-Formeln sind, identifizieren Sie diejenigen, die *informelle Schreibweisen* von S-Termen und S-Formeln sind und geben Sie an, welchem S-Term oder welcher S-Formel sie entsprechen. Im folgenden sind x, y, z Variablen in V.

xy	$x(y)$	$\dot{R}(x,y)$	$\dot{f}(x,z)$	$(\dot{R}(x,z))$	$(\dot{R}(x,z) \wedge \dot{R}(y,y))$
$x\dot{R}y$	$\dot{R}(x,z) \wedge \dot{R}(y,y)$	$\dot{f}(\dot{f}(x,x),x)$	$\dot{R}(\dot{f}(x,y),\dot{c})$	$c \wedge x$	$\dot{f}(x,c)$
$\neg(\dot{R}(x,y))$	$x = y$	$\exists x(x = x)$	$\forall xx = x$	$\dot{f}\dot{R}\dot{c}$	$(())$
$(\dot{f}(\dot{c},\dot{c}))$	$\neg(x = y \wedge \dot{R}(x,y))$	$\dot{f}(\dot{f}(\dot{c},x),y)$	$\dot{f}(\dot{c},x,y)$	$\dot{R}\dot{f}xy\dot{c}$	$(\dot{R}(x,y) \wedge z = \dot{c}$

(3) Sei $S = S_{\mathrm{R}} \cup S_{\mathrm{F}} \cup S_{\mathrm{K}}$ die Symbolmenge mit $S_{\mathrm{R}} := \varnothing$, $S_{\mathrm{F}} := \{\dot{m}, \dot{a}\}$ und $S_{\mathrm{K}} := \{\dot{e}\}$. Sei σ die Signatur mit $\sigma(\dot{m}) = \sigma(\dot{a}) = 2$. Interpretieren Sie $\dot{m}$ als Multiplikation, $\dot{a}$ als Addition und $\dot{e}$ als 1 und drücken Sie den informellen Term $x^2 + 2x + 1$ als S-Term aus. Geben Sie eine Ableitung für den Term im Termkalkül.

(4) Zeigen Sie durch Induktion über den Termaufbau, daß in jedem S-Term das Symbol) genau so oft auftritt wie das Symbol (.