Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Mathematik & Musik
Sommersemester 2022
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Trainingsgelegenheiten

Die folgenden Aufgaben sind nicht als reguläre Hausaufgaben gedacht, sondern als Gelegenheit für die Nach- und Klausurvorbereitung. Die Aufgaben folgen dem Stoff der Vorlesung in chronologischer Reihenfolge. Es gibt keine Abgabe oder Korrektur.

(1) Nehmen wir (fälschlicherweise) an, die Anekdote von *Pythagoras in der Schmiede* wäre wahr und die Töne eines Hammers auf einem Amboß hätten Frequenzen, die proportional zum Gewicht des Hammers sind. (*Hinweis.* Dies ist eine physikalisch falsche Annahme!) In welchem Intervall klängen dann ein Hammer, der 12 Pfund wiegt, und ein Hammer, der 16 Pfund wiegt?

(2) Betrachten Sie die Kurve $f(x) := \sin(x) + \sin(2x)$ zwischen 0 und 2π (z.B. auf Seite 15 der Vorlesungsnotizen zur ersten Vorlesung). Machen Sie sich klar, warum das Maximum dieser Funktion strikt kleiner als 2 sein muss und warum die Funktion drei Nullstellen zwischen 0 und 2π haben muss.

(3) Seien $f(x) := \sin(x)$, $g(x) := \sin(2x)$ und $h(x) := \sin(3x)$. Zeigen Sie, daß die Mengen $\{f, g\}$ und $\{f, g, h\}$ linear unabhängige Teilmengen des Vektorraums $\mathrm{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sind.

(4) Betrachten Sie die Funktion $F(y, x) := 2\sqrt{|y|}$ und zeigen Sie, daß F am Punkte $(0, 0)$ stetig, aber nicht stetig differenzierbar ist.

Zeigen Sie, daß sowohl die Funktion $f(x) := x^2$ als auch die Funktion $g(x) := 0$ Lösungen des Anfangswertproblems $(F, 0)$ sind. Diskutieren Sie, daß dies (wegen des Satzes von Picard-Lindelöf) bedeutet, daß F nicht Lipschitz-stetig ist (dafür müssen Sie nicht einmal wissen, was das bedeutet!).

Sind f und g die einzigen Lösungen des Anfangswertproblems $(F, 0)$?

[*Hinweis.* $h(x) := 0$ für $x < 1$ und $h(x) := (x - 1)^2$ für $x \geq 1$. Können Sie das verallgemeinern, um unendliche viele Lösungen zu finden?]

(5) Ist $(V, +)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, so definieren wir die folgenden Operationen auf der Menge aller n-Tupel von Vektoren aus V: $(v_1, ..., v_n) + (w_1, ..., w_n) := (v_1 + w_1, ..., v_n + w_n)$ und $\lambda \cdot (v_1, ..., v_n) := (\lambda \cdot v_1, ..., \lambda \cdot v_n)$. Zeigen Sie, daß V^n mit diesen Operationen einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bildet. Wissen Sie, welche Dimension V^n hat, wenn z.B. $\dim(V) = m$?

(6) Sei A eine $n \times n$-Matrix und $\Phi(x, \vec{y}) = A \cdot \vec{y}$ ein lineares homogenes System von Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Für jedes $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ist also $(\Phi, \vec{x})$ ein Anfangswertproblem. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf besitzt dieses eine eindeutige Lösung, die wir mit $\vec{\varphi}_{\vec{x}}$ bezeichnen wollen.

Überlegen Sie sich zunächst, daß es für jede Lösung $\vec{\varphi}$ von Φ ein Tupel $\vec{x}$ gibt, so daß $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_{\vec{x}}$.

In Vorlesung II hatten wir behauptet, daß $\vec{x} \mapsto \vec{\varphi}_{\vec{x}}$ ein Vektorraumisomorphismus zwischen $\mathbb{R}^n$ und dem Untervektorraum aller Lösungen von Φ in $\mathrm{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^n$ ist. Machen Sie sich zunächst klar, was das eigentlich bedeutet: Injektivität, Surjektivität, Linearität (also $\vec{\varphi}_{\vec{x}+\vec{y}} = \vec{\varphi}_{\vec{x}} + \vec{\varphi}_{\vec{y}}$ und $\vec{\varphi}_{\lambda\vec{x}} = \lambda\vec{\varphi}_{\vec{x}}$). Danach überprüfen Sie, daß diese Eigenschaften auch tatsächlich alle gelten.

(7) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie per Induktion, daß $A^{2k} = 6^k E$ und $A^{2k+1} = 6^k A$, wobei E die 2-dimensionale Einheitsmatrix ist.

(8) In Vorlesung III haben wir bewiesen, daß das Matrixexponential definiert ist, indem wir die Reihe des (i, j)ten Eintrags der Matrix e^A abgeschätzt hatten.

Wir erinnern uns: der (i, j)te Eintrag der Matrix A^k war mit a_{ijk} bezeichnet worden und der (i, j)te Eintrag des Matrixexponentials e^A ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{ijk}}{k!}.$$

Wir mußten zeigen, daß diese Reihe konvergiert und hatten dafür die folgende Abschätzung verwendet:

$$a_{ijk} \leq \sqrt{\|A^k\|} \leq (\sqrt{\|A\|})^k,$$

also gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{ijk}}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{\|A\|})^k}{k!} \leq \mathrm{e}^{\sqrt{\|A\|}}.$$

Aber im allgemeinen gilt nicht: falls $x_k \leq y_k$ für alle k und $\sum_{k=0}^{\infty} y_k$ konvergiert, so konvergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$. (Überlegen Sie sich ein einfaches Beispiel!) Überlegen Sie sich, daß dies hier kein Problem ist, weil wir sogar die Reihe $\frac{|a_{ijk}|}{k!}$ abschätzen können. (Erinnern Sie sich bei der Gelegenheit an den Unterschied zwischen *absolut konvergenten* und *bedingt konvergenten* Reihen.)

Hier eine Liste der Additionstheoreme, die Sie in den folgenden Berechnungen ohne Beweis verwenden dürfen:

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \tag{AT1}$$
$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y), \tag{AT2}$$
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \tag{AT3}$$
$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y), \tag{AT4}$$
$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1. \tag{AT5}$$

(9) In Vorlesung III hatten wir gesehen, dass eine Linearkombination von Sinus und Kosinus als phasenverschobener Sinus dargestellt werden kann. Zeigen Sie, daß sie auch als phasenverschobener Kosinus dargestellt werden kann, also, daß wir Zahlen C und α finden, so daß

$$\lambda \sin(x) + \mu \cos(x) = C \cdot \cos(x + \alpha).$$

(10) In Vorlesung III hatten wir aus (AT1) und (AT2) die Gleichung

$$\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \sin(x) \cos(y)$$

gefolgert. Folgern Sie ebenso, daß

$$\cos(x + y) - \cos(x - y) = -2 \sin(x) \sin(y).$$

(11) Leiten Sie die folgenden Additionstheoreme aus den oben vorgegebenen ab:

(a) $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$,

(b) $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$,

(c) $\sin(3x) = 3 \sin(x) - 4 \sin^3(x)$.

(12) Zeigen Sie aus den bisher abgeleiteten Additionstheoremen die folgenden Bruchformeln (jeweils für $\sin(x) \neq 0$):

(a) $\dfrac{\sin(2x)}{\sin(x)} = 2 \cos(x)$,

(b) $\dfrac{\sin(3x)}{\sin(x)} = 4 \cos^2(x) - 1$.

(13) Zeigen Sie, daß

$$\sin(x - \varepsilon) + \sin(x) + \sin(x + \varepsilon) = \left(4 \cos^2(\tfrac{\varepsilon}{2}) - 1\right) \sin(x).$$

[*Hinweis.* Multiplizieren Sie mit $\sin(\frac{\varepsilon}{2})$ und verwenden Sie die Gleichungen aus (10) und (12b).]

(14) Angenommen, ein Klavierstimmer hat von den drei Saiten für einen Klang die mittlere auf 220 Hz gestimmt und die beiden anderen weichen jeweils um 2 Hz nach unten und oben ab (218 Hz und 222 Hz). Er hört eine Schwebung mit Frequenz 1 Hz, bei der sich jeweils ein lauter Ton und ein leiserer Ton der gleichen Frequenz abwechseln. (Wenn Sie sich dies nicht vorstellen können, erzeugen Sie den Ton mittels eines Tongenerators

mit drei Sinusschwingungen mit 218, 220 und 222 Hz.) Welche Frequenz hat der Ton? Erklären Sie die Frequenz und das Klangverhalten mathematisch unter Verwendung von (13).

[*Hinweis.* Verwenden Sie (13), um zu erkennen, daß der Klang eine Sinusschwingung ist, die durch die Funktion $4\cos^2(x) - 1$ moduliert ist. Betrachten Sie das Verhalten dieser Funktion und erklären Sie damit die Abfolge des lauten und leiseren Tons.]

(15) Der Satz von d'Alembert sagt, daß eine Lösung φ der Wellengleichung $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$ mit $\varphi(0,t) = \varphi(\ell,t) = 0$ für alle t die Form $\varphi(x,t) = f(x+ct)-f(ct-x)$ haben muß, wobei f eine 2ℓ-periodische Funktion ist. In Vorlesung IV hatten wir überprüft, daß die Funktion $f(\xi) := \cos(\frac{\pi\xi}{\ell})$ eine Lösung induziert (die *Bernoulli-Lösung*). Überprüfen Sie, daß auch die Funktion $f(\xi) = \sin(\frac{\pi\xi}{\ell})$ eine Lösung der Wellengleichung induziert. Überlegen Sie sich insbesondere, daß beide Funktionen 2ℓ-periodisch sind.

(16) Leiten Sie aus der Mersenneschen Formel das folgende Gesetz her: "Die Länge einer Saite bei gleichem Ton, gleicher Spannkraft und gleichem Material ist invers proportional zum Durchmesser der Saite."

(17) Nehmen Sie an, daß Klaviersaiten mit einer Spannkraft von 900 N gespannt sind und daß die Diskantsaiten im Klavier einen Durchmesser von 0,6 mm haben. Der höchste Ton eines Klaviers wird üblicherweise auf etwa 4000 Hz gestimmt. Welche Saitenlänge brauchen wir für diesen Ton, wenn die Saiten aus den in der folgenden Tabelle angegebenen Materialien sind?

Material	Dichte (in $\mathrm{kg\,m^{-3}}$)
Nylon	1.100
Seide	1.140
Rosshaar	1.300
Naturdarm	1.350
Stahl	7.860
Messing	8.500
Nickel	8.900
Kupfer	8.960

(18) Mit den Angaben aus (17) und einer Saite aus Stahl, welche Saitenlänge bräuchten wir für einen tiefen Ton wie 55 Hz? Was muß der Durchmesser einer Saite sein, damit sie bei gleicher Spannkraft und gleichem Material in ein 150cm hohes Klavier paßt und einen Ton der Frequenz 55 Hz liefert? Wie hoch müßte ein Klavier mindestens sein, welches mit Naturdarmsaiten mit maximal $2\frac{1}{2}$ mm Durchmesser bespannt ist?

(19) Eine Geige ist mit Naturdarmsaiten bespannt, die 30 cm lang sind und 0,45 mm Durchmesser haben. Verwenden Sie die Formeln, die Sie in (17) und (18) entwickelt haben,

um festzustellen, welche Tonfrequenz zu erwarten ist. Der Ton der Geige ist allerdings deutlich niedriger (eine übliche Geigenstimmung stimmt die vier Saiten auf 660 Hz, 440 Hz, $293\frac{1}{3}$ Hz und $195\frac{5}{9}$ Hz). Woran liegt das? Berechnen Sie die Spannkraft der 440 Hz-Saite auf der Geige.

(20) Es seien $\mathrm{E}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ die Menge aller geraden Funktionen und $\mathrm{O}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ die Menge aller ungeraden Funktionen. Zeigen Sie, daß $\mathrm{E}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und $\mathrm{O}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ Untervektorräume von $\mathrm{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sind.

(21) Zeigen Sie, daß jede beliebige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion darstellt werden kann.

[*Hinweis.* Betrachten Sie den Mittelwert von $f(\vartheta)$ und $f(-\vartheta)$.]

(22) Sei f eine stetig differenzierbare gerade $\frac{1}{\nu}$-periodische Funktion und

$$f(\vartheta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos(2\pi\nu m\vartheta)$$

ihre Kosinusfourierreihe. Zeigen Sie, daß die Folge der Kosinuskoeffizienten a_m eine Nullfolge bildet.

(23) Zeigen Sie, daß die Funktion $f(\vartheta) := \sin(\vartheta) + \cos(\vartheta)$ weder gerade noch ungerade, aber 2π-periodisch ist. Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten von f.

[*Hinweis.* Die folgenden Integralformeln könnten nützlich sein:

$$\begin{aligned}
&\int \sin ax \sin ax \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4a}\sin 2ax,\\
&\int \sin ax \sin bx \,\mathrm{d}x = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} \quad (\text{falls } a \neq b),\\
&\int \cos ax \cos ax \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4a}\sin 2ax,\\
&\int \cos ax \cos bx \,\mathrm{d}x = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} \quad (\text{falls } a \neq b),\\
&\int \sin ax \cos ax \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2a}\sin^2 ax,\\
&\int \cos ax \cos bx \,\mathrm{d}x = -\frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} \quad (\text{falls } a \neq b).
\end{aligned}$$

Diese Formeln stammen aus dem Bronstein-Semendjajew (für $a, b \geq 0$): 275., 305., 314., 346., 354. und 408.).]

(24) Die folgende Funktion ist die Kosinusvariante der Quadratwelle:

$$k(\vartheta) := \begin{cases} 1 & \text{falls } -\frac{1}{4\nu} \leq \vartheta < \frac{1}{4\nu} \text{ und} \\ -1 & \text{falls } \frac{1}{4\nu} \leq \vartheta < \frac{3}{4\nu}, \end{cases}$$

$\frac{1}{\nu}$-periodisch fortgesetzt. Wir wollen sie die *Kosinusquadratwelle* nennen. Überlegen Sie sich, daß es sich um eine gerade Funktion handelt. Daher besteht ihre Fourierreihe aus den Kosinuskoeffizienten a_m (und für alle Sinuskoeffizienten gilt $b_m = 0$). Berechnen Sie mittels der Formeln in Dirichlets Theorem die Fourierkoeffizienten.

(25) Überlegen Sie sich, daß die Kosinusquadratwelle k eine Phasenverschiebung der Quadratwelle um $\frac{1}{4\nu}$ ist, also: $k(\vartheta) = s(\vartheta + \frac{1}{4\nu})$. Wir hatten die Koeffizienten der Quadratwelle wie folgt bestimmt (Vorlesung VI, Seite 7):

$$b_m = \begin{cases} 0 & \text{falls } m \text{ gerade und} \\ \frac{4}{m\pi} & \text{falls } m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Verwenden Sie die obige Überlegung, um die Fourierkoeffizienten der Kosinusquadratwelle direkt aus den b_m zu bestimmen, ohne die Formeln aus Dirichlets Theorem zu verwenden.

(26) Seien p und q Primzahlen und f und g Klänge der Grundfrequenzen $p\nu$ und $q\nu$. Zeigen Sie, daß jeder $q$te Oberton von f ein Oberton von g ist und jeder $p$te Oberton von g ein Oberton von f. Beachten Sie, an welcher Stelle in ihrem Beweis die Voraussetzung, daß p und q prim sind, verwendet wird. Können Sie den Beweis mit einer schwächeren Voraussetzung führen?

(27) Überlegen Sie sich, daß die Aussage von (26) im allgemeinen nicht gilt, wenn p und q keine Primzahlen sind, indem Sie die Obertöne von Klängen der Grundfrequenzen 4ν und 6ν miteinander vergleichen. Erklären Sie die Situation. Wie heißt das Intervall, welches wir in diesem Falle hören?

(28) Nehmen Sie an, daß wir einen Grundton der Frequenz ν haben. Stellen Sie sich vor, daß Sie vom Grundton eine Quinte nach oben, dann eine Sekunde nach unten, dann eine große Terz nach oben und dann eine Quarte nach unten gehen. Geben Sie die Frequenz ν' des letzten Tons an. Beschreiben Sie das Intervall zwischen ν und ν' mit einem Intervallnamen.

(29) Teilen Sie die Oktave in 24 Vierteltöne auf. In einer *gleichstufigen Stimmung* findet man einen Faktor λ, so daß jeder Vierteltonschritt dem Faktor λ entspricht. Was ist λ? Zeigen Sie, daß in dieser Stimmung kein Oberton des Grundtons erreicht wird, der keine Oktave des Grundtons ist.

(30) Bestimmen Sie die Bezeichnungen der Töne, die jeweils eine Quinte über den Tönen G$\sharp$, A$\sharp$ und H$\sharp$ liegen.

(31) Berechnen Sie das Intervall zwischen C und H$\flat\flat\flat$.

(32) In Analogie zur Quintenstimmung aus § 7 der Vorlesung können wir eine *Terzenstimmung* definieren, bei der jeweils von einem Ton die große Terz (vier Halbtonschritte) nach oben gestimmt wird (also von C gehen wir zu E, von E zu G$\sharp$, von G$\sharp$ zu H$\sharp$ etc.). Warum werden wir mit dieser Stimmungsmethode nicht alle zwölf Halbtöne erreichen? Zeichnen Sie die *Terzenspirale* in Analogie zur Quintenspirale und erklären Sie, was man hier als *Enharmonie* bezeichnen würde. Wie würde man das *Terzenkomma* definieren und welchen numerischen Wert hat es?

(33) Zeigen Sie, daß es bei der Terzenstimmung aus (32) keine zwei Töne in der Terzenspirale gibt, deren Intervall eine reine Quinte (also $\frac{3}{2}$) ist.

(34) In der pythagoräischen Stimmung betrachten Sie den Ton X, den Sie erhalten, wenn Sie zwölf pythagoräische Halbtonschritte von C nach oben gehen. Wieviele pythagoräische Kommas ist das Intervall zwischen X und dem oktavierten C?

(35) Berechnen Sie die Cent-Werte für die Intervalle zwischen dem sechsten und fünften Oberton (also $\frac{7}{6}$) und dem siebten und sechsten Oberton (also $\frac{8}{7}$).

(36) Berechnen Sie den Cent-Wert des Tons E$\flat\flat$ in pythagoräischer Stimmung.

(37) Stellen Sie fest, welche der folgenden Dreiklänge Dur, Moll, vermindert oder übermäßig sind: C–E$\flat$–G, D–F$\sharp$–A$\sharp$, E$\sharp$–G$\sharp$–H, F–A–C$\sharp$, G–H–D, A$\flat$–C$\flat$–E$\flat$ und H–D–F.

(38) Bestimmen Sie Tonika, Subdominante und Dominante zum Grundton F$\flat$ (in Dur).

(39) Die pythagoräische Stimmung und die reine Stimmung haben unterschiedliche Frequenzen für die Töne E, A und H. Für jeden der drei Töne bestimmen Sie, welche Stimmung dem Ton eine höhere Frequenz gibt und bestimmen Sie die Differenz zwischen den beiden Stimmungen (erst als Zahlenverhältnis, dann in Cent und zuletzt als Vielfaches des syntonischen Kommas).

(40) In der reinen Stimmung hatten wir die Frequenzen der Töne G$\sharp$, D$\sharp$ und A$\sharp$ als $\frac{25}{16}$, $\frac{75}{64}$ und $\frac{225}{128}$ bestimmt (vgl. Vorlesung X, Seite 8). In der Eitz-Notation gaben wir an, daß diese drei Töne jeweils zwei syntonische Kommas unter der pythagoräischen Stimmung liegen (vgl. Vorlesung X, Seite 14). Überprüfen Sie diese Behauptung.

(41) Betrachten Sie die folgende Stimmung in Eitz-Notation und zeigen Sie, daß sie rein für F ist.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{F}\sharp^{-2} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{C}\sharp^{-2} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{G}\sharp^{-2} \arrow[dr] & \\
 & \mathrm{D}^{-1} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{A}^{-1} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{E}^{-1} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{H}^{-1} \\
\mathrm{H}\flat^{0} \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mathrm{F}^{0} \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mathrm{C}^{0} \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mathrm{G}^{0} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

(42) Zeigen Sie rechnerisch, daß die in (41) gegebene Stimmung nicht rein für C, aber schwach rein für C ist.

[*Hinweis.* Hier heißt "zeigen Sie rechnerisch", daß Sie zunächst bestimmen, welche Intervalle welche Zahlwerte haben müssen, damit eine Stimmung rein / schwach rein für C ist und dann diese Zahlwerte berechnen, um die Behauptung zu beweisen.]

(43) Zeigen Sie rechnerisch, daß die in (41) gegebene Stimmung rein für A ist.

(44) Beschreiben Sie in Worten, wie man anhand der diagrammatischen Eitz-Notation graphisch Tonika, Subdominante und Dominante über einem Grundton erkennen kann. Wie kann man daher mit einem Blick (ohne Rechnung) erkennen, daß die Dur-Dreiklänge über H♭, F, C, D, A und E allesamt rein in der Stimmung aus (41) sind?

[*Hinweis.* Verwenden Sie die Regel von Seite 13 aus Vorlesung X.]

(45) Geben Sie die diagrammatische Eitz-Notation für eine Stimmung an, die rein für H♭ ist (und in der H♭ pythagoräisch gestimmt ist).

(46) Vergleichen Sie die C-Dur, G-Dur und F-Dur-Tonleitern in der reinen Stimmung und stellen Sie fest, daß diese voneinander unterscheidbar sind, ohne die Grundfrequenz festzulegen. In welchem Ton unterscheiden sich C-Dur und G-Dur? In welchem Ton unterscheiden sich C-Dur und F-Dur?

(47) Überlegen Sie sich eine temperierte (unregelmäßige) Stimmung, bei der die große Terz, die Quarte und die Quinte zum Grundton rein sind, die beiden Halbtonschritte (E–F und H–C) gleich groß sind und die verbleibenden Töne jeweils die Abstände halbieren:

$$\mathrm{C}^0 \quad \mathrm{D}^? \quad \mathrm{E}^{-1} \quad \mathrm{F}^0 \quad \mathrm{G}^0 \quad \mathrm{A}^? \quad \mathrm{H}^? \quad \mathrm{C}^0$$

Bestimmen Sie diese Stimmung in Eitz-Notation und rechnen Sie die numerischen Werte der Frequenzen aus. Stellen Sie fest, ob die Dreiklänge C-Dur, G-Dur und F-Dur rein, schwach rein oder approximativ rein in dieser Stimmung sind.

(48) Berechnen Sie die Größe aller Ganztonschritte in der Stimmung aus (47). Sind alle Ganztonschritte gleich groß?

[*Hinweis.* Es ist sinnvoll, die Größe eines Ganztonschritts in der Form von "pythagoräischer Ganztonschritt plus/minus Anteil eines Kommas" anzugeben. Z.B. ist der Abstand von C^{-1} nach D^{-1} exakt ein pythagoräischer Ganztonschritt (also $\frac{9}{8}$) und der Abstand von $\mathrm{F}^{-\frac{1}{2}}$ nach G^{+1} ein pythagoräischer Ganztonschritt plus anderthalb syntonische Kommas (also $\frac{9}{8} \cdot \frac{81}{80} \cdot \frac{9}{4\sqrt{5}} = \frac{3^8}{2^9 \cdot 5 \cdot \sqrt{5}}$).]

(49) Überprüfen Sie, ob Sie in der Stimmung aus (47) die folgenden Dreiklänge rein stimmen können. Wenn ja, geben Sie an, welchen Ton Sie wie stimmen müssen, um den Dreiklang rein zu stimmen; wenn nein, geben Sie den Grund an, warum dieser Dreiklang nicht rein sein kann: (i) A-Dur, (ii) E-Dur, (iii) D-Dur und (iv) H-Dur.

(50) Sei q eine rationale Zahl und betrachten Sie die folgende Stimmung, die wir die *q-mitteltönige Stimmung* nennen wollen:

$$\begin{tikzcd}
& & \mathrm{F}\sharp^{-6q} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{C}\sharp^{-7q} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{G}\sharp^{-8q} \arrow[dr] & & \\
& \mathrm{D}^{-2q} \arrow[rr] \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathrm{A}^{-3q} \arrow[rr] \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathrm{E}^{-4q} \arrow[rr] \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathrm{H}^{-5q} \arrow[dr] & \\
\mathrm{H}\flat^{+2q} \arrow[rr] \arrow[ur] & & \mathrm{F}^{+q} \arrow[rr] \arrow[ur] & & \mathrm{C}^{0} \arrow[rr] \arrow[ur] & & \mathrm{G}^{-q} \arrow[rr] \arrow[ur] & & \mathrm{D}^{-2q}
\end{tikzcd}$$

Überlegen Sie sich, daß $\frac{1}{4}$-mitteltönige Stimmung genau die Viertelkomma-Stimmung und die 0-mitteltönige Stimmung genau die pythagoräische Stimmung ist.

(51) Betrachten Sie die $\frac{1}{7}$-mitteltönige Stimmung (vgl. (50); auch *Romieu-Stimmung* genannt) und überprüfen Sie, ob die Dreiklänge C-Dur, F-Dur, G-Dur, A-Dur, D-Dur rein, schwach rein oder approximativ rein sind.

(52) Untersuchen Sie den A-Dur Dreiklang in der Stimmung *Werckmeister III* (vgl. Vorlesung XI) und berechnen Sie die Abweichungen der großen Terz, der kleinen Terz und der Quinte von den reinen Klängen in Cent. Ist dieser Dreiklang von identischem Charakter wie einer der Dreiklänge, die wir in der Vorlesung betrachtet hatten (C-Dur, G-Dur, D-Dur, E♭-Dur, H♭-Dur und F-Dur)?