

MATHEMATIK & MUSIK

4. Juli
2002

Elfte (und vorletzte) Vorlesung

Reine Strömungen

für eine Tonart X
STIMMEN Tonika, Subdominante und
Dominante von X jeweils rein

Die Strömung kann nicht rein für X und
rein für Y sein, wenn Y die Quinte
der X ist.

Qtz-Notation

$$\frac{3^4}{2^4 \cdot 5} = \frac{81}{80}$$

≈ 21,5 cent

$$\frac{3^{12}}{2^7}$$

≈ 23,5 cent

0 pythagoräische festkant

±1 von einer syntaktischen Komma erhöht /
erniedrigt

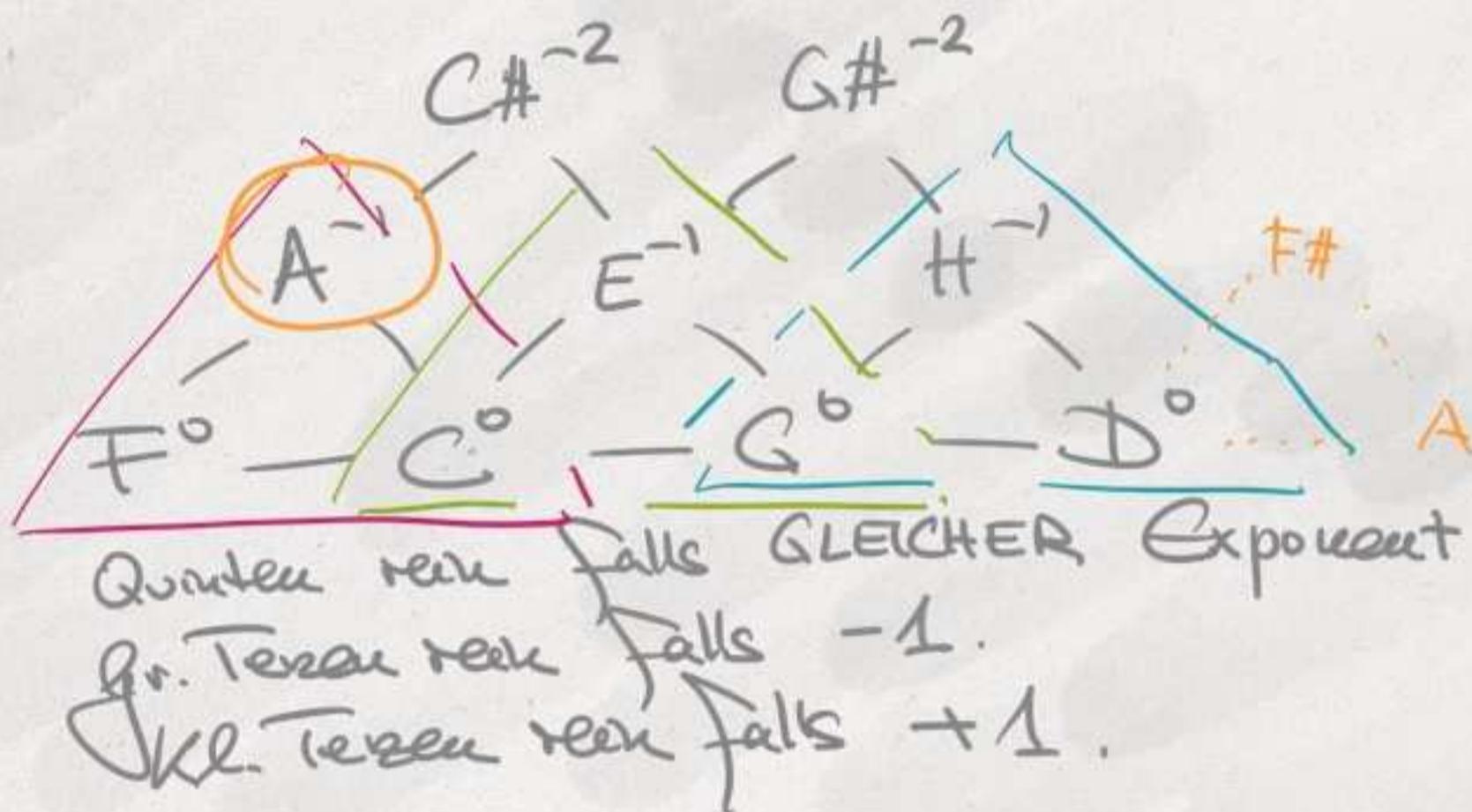
±1p von einer pythagoräischen Komma erhöht /
erniedrigt

C° - D° - E° - F° - G° - A - H - C°

Diagrammatische Eitz-Notation:

linkes \rightarrow rechts
 rechts \rightarrow linkes
 rechts oben
 rechts unten

Quarte
 Quinte
 große Terz
 kleine Terz



Reine Struktur -

gut für eine Tonne
 nicht gut für alle anderen.

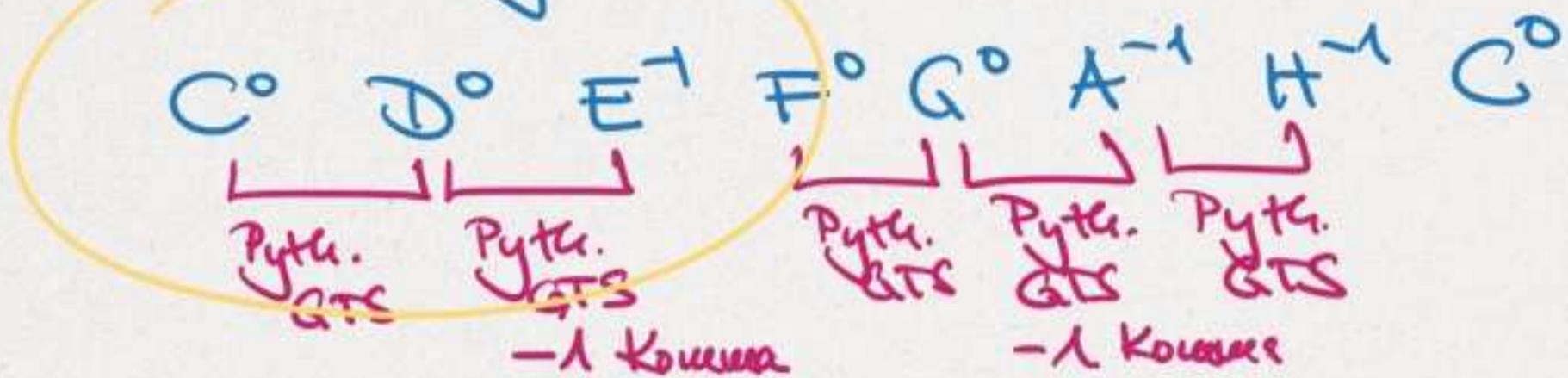
§ 9 Temperierte Stromungen

TEMPERATE

mäßigen

>

Reine Stromung



D.h. die GTS sind nicht mehr gleich;
z.B. Abstand zw. D und E kleiner
gezahlt, aber Abstand zw. C und
H gleich gelassen.

Idee der Temperierung:

Diese Differenzen sollten
gleichmäßig verteilt werden.

$$C^{\circ} \quad D^{-\frac{1}{2}} \quad E^{-1}$$

wäre gleichmäßig verteilt.

Was ist eigentlich ein halbes syntaktisches Koma?

NICHT $\frac{81}{160}$!

$$\text{Denn } \frac{81}{160} \cdot \frac{81}{160} \neq \frac{81}{80}$$

Stattdessen wollen wir x , so dass $x^2 = \frac{81}{80}$,

$$\text{also } x = \sqrt{\frac{81}{80}} = \frac{9}{4\sqrt{5}}$$

Ein halbes syntaktisches Koma sind also

$$\frac{9}{4\sqrt{5}}$$

Nun können wir $\mathcal{D}^{-\frac{1}{2}}$ ausrechnen:

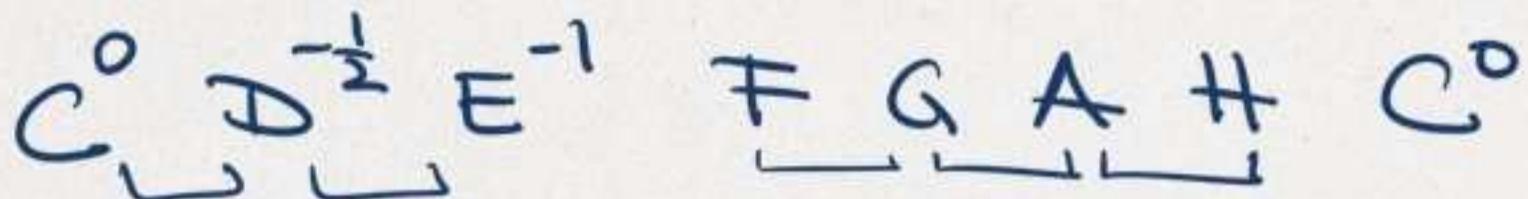
Pythagorisches \mathcal{D}° : $\frac{9}{8}$

$$\frac{9}{8} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{9} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

2 Es ist natürlich kein Zufall, da

$$\frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

Also ist nun der GTS gleich dem
pythagoräischen $-\frac{1}{2}$ syntaktisches Komma.

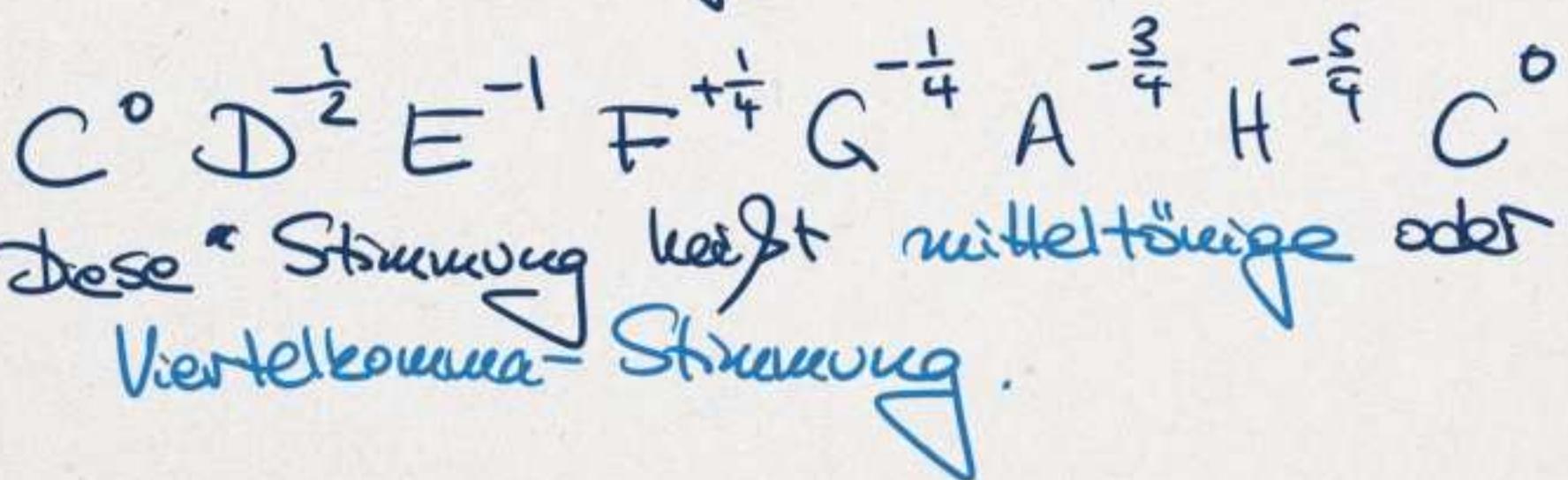


Da die gesamte Oktave aus 5 GTS und 2 HTS besteht, setzen wir h für HTS.

$$2 \cdot h + 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$h = \frac{5}{2} \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

Somit erhalten wir, wenn die GTS & HTS jeweils konstant sein sollen,
die Struktur



Rechnen wir nun alle Töne aus:

$$C^0 = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$$

$$D^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt[4]{5}}{2}$$

$$E^{-1} = \frac{\sqrt[4]{5}}{4}$$

$$F^{+\frac{1}{4}} = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{2\sqrt[4]{5}}$$

Ein halbes Komma war
 $\frac{9}{4\sqrt[4]{5}}$ -

Ein Viertelkomma
 $\frac{3}{2\sqrt[4]{5}}$.

$$= \frac{2}{\sqrt[4]{5}}$$

$$G^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt[4]{5}}{3} = \sqrt[4]{5}.$$

$$A^{-\frac{3}{4}} = \frac{3^2}{2^4} \cdot \frac{2^3 (\sqrt[4]{5})^3}{3^3} = \frac{(\sqrt[4]{5})^3}{2}.$$

$$H^{-\frac{5}{4}} = \frac{3^2}{2^2} \cdot \frac{2^2 (\sqrt[4]{5})^5}{3^2} = \frac{5 \cdot \sqrt[4]{5}}{4}$$

Pyth. A

Pyth. H

$C^\circ D^{-\frac{1}{2}} E^{-1} F^{+\frac{1}{4}} G^{-\frac{1}{4}} A^{-\frac{3}{4}} H^{-\frac{5}{4}} C^\circ$

C -Dur Dreiklang

$C^\circ - E^{-1} - G^{-\frac{1}{4}}$

rene
große
Terz

keine reine
kleine Terz
soudern eine

$\frac{1}{4}$ Syntaxis des
Kontinua reduziert

J.h. G -Dur ist schwache Reize,
aber wird rein.

F -Dur Dreiklang

$F^{+\frac{1}{4}} - A^{-\frac{3}{4}} - C^\circ + \frac{1}{4}$

rene
große
Terz

um $\frac{1}{4}$ syntaktische
Kontinua
verschoben.

G -Dur Dreiklang

$G^{-\frac{1}{4}} - H^{-\frac{5}{4}} - D^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}$

rene
große
Terz

um $\frac{1}{4}$ syntaktische
Kontinua
verschoben

Wir haben den Fehler verteilt und die
Quinten sind nur $\frac{1}{4}$ Kontinua verschoben.

Wie groß ist eine Viertelkommene?

Syntowisches Koma: 21,5 cent.

Halbes syntowisches Koma: 10,8 cent

Viertel Koma: 5,4 cent.

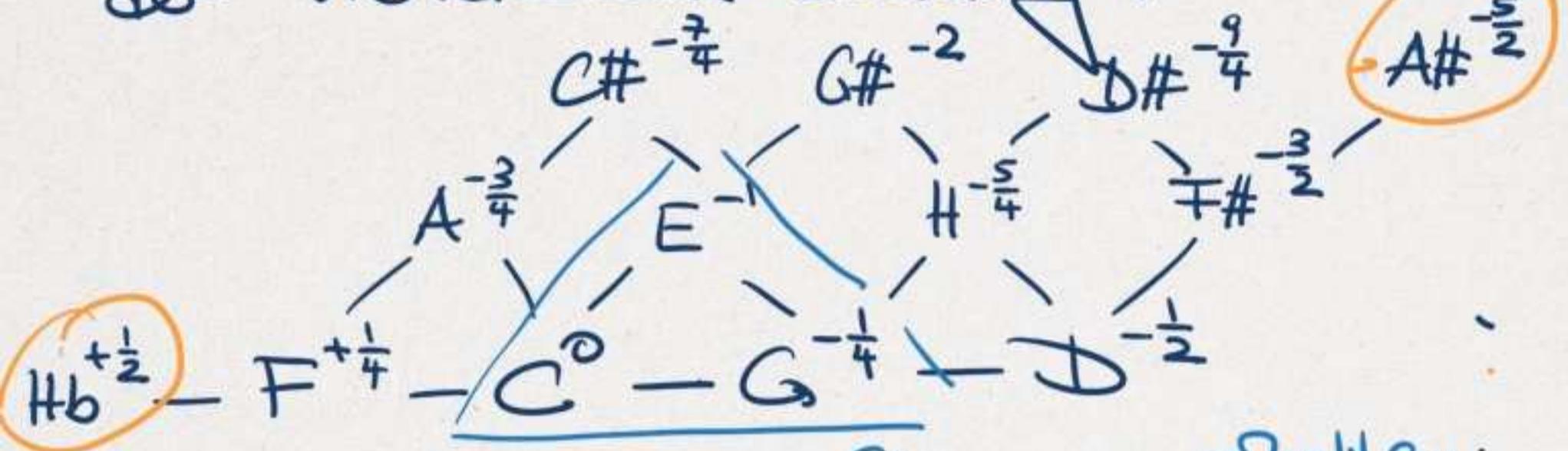
Definition Die Strömung heißt

n-approximativ reell für X

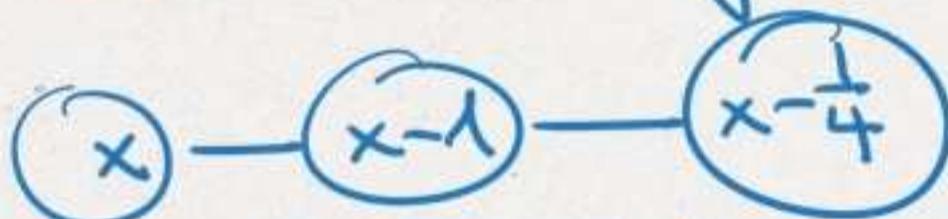
Falls Tonika, Subtonika und
Dotonika für X jeweils von
der reinen Strömung maximal
um n Cent abweichen.

Also: unsere vorige Bedeutung ~~ist~~,
dass die Viertelkommene-Strömung
6-approximativ reell für C ist.

Wir zerlegen das \mathbb{G}_2 -Diagramm
der Viertelkreisum-Struktur:



In der mitteltönigen Struktur erhalten
wir bei allen Dreiklängen das gleiche
Muster:



Uniform für alle Töne.

Allerdings

Abde hier gibt es
Ecksonne.

Z.B.

Hb^{+\frac{1}{2}} vs A#^{-\frac{5}{2}}

Wir werden sehen, daß diese recht
unterschiedliche sind:

$\text{Hb}^{\frac{1}{2}}$

pythagoreisches Hb: $16/9$

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{16}{4\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \approx 1,7888$$

Halbes Komma

$A\#^{-\frac{s}{2}}$

pyth. A $\#$: $\frac{3^{10}}{2^{15}}$

$$\frac{9}{4\sqrt{5}} = \frac{3^2}{2\sqrt{5}}$$

$$\frac{\cancel{3^{10}}}{\cancel{2^{15}}} \cdot \frac{\cancel{2^{10}}}{\cancel{3^{10}}} \cdot (\sqrt{5})^s$$

$$2^s = \frac{25\sqrt{5}}{2^s} \approx 1,7469$$

Der Abstand ist:

$$\frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2^s}{25\sqrt{5}} = \frac{2^7}{5^3} = 1,024.$$

Der Abstand ist auch:

Drei syntone Kommae reihw
ein pythagoreisches Komma:

$$\text{Synt. Komma: } \frac{3^4}{2^4 \cdot 5}$$

$$\text{Pyth. Komma: } \frac{3^{12}}{2^{19}}$$

$$\frac{\cancel{3^4} \cdot \cancel{3^4} \cdot \cancel{3^4}}{\cancel{2^4} \cdot \cancel{2^4} \cdot \cancel{2^4} \cdot 5^3} \cdot \frac{2^7}{\cancel{3^4}} = \frac{2^7}{5^3}$$

$$= \frac{2^7}{5^3}$$

Wir haben in den Standardbasen
drei Fehler gleichzeitig verteilt,
so daß die Dreiklänge akustisch
klingen und approximativ seien
sind.

Aber: wir haben die euklidischen
Fehler der pythagoräischen
Stimmung fast verdoppelt.

WOLFSINTERVALL

DER WOLF

"heult wie ein Wolf"

WOHLMERKIERTES STIMMUNGEN

J.S. Bach

Urtext

Das Wohltemperierte Klavier
Teil I

The Well-Tempered Clavier
Part I

G. Henle Verlag



Johann Sebastian
BACH 1685-1750



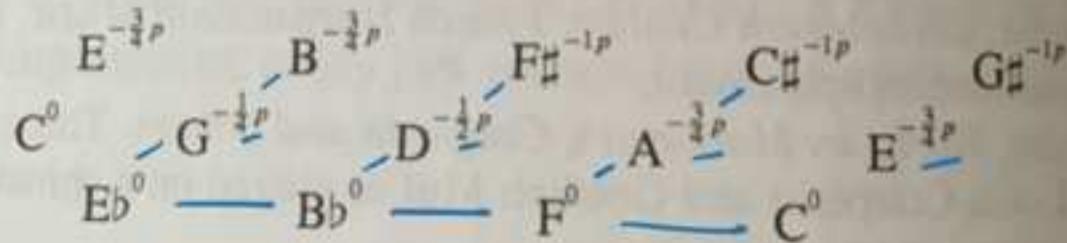
1722

Andreas
Werckmeister.
1645-1706



Werckmeister III (Correct Temperament No. 1)

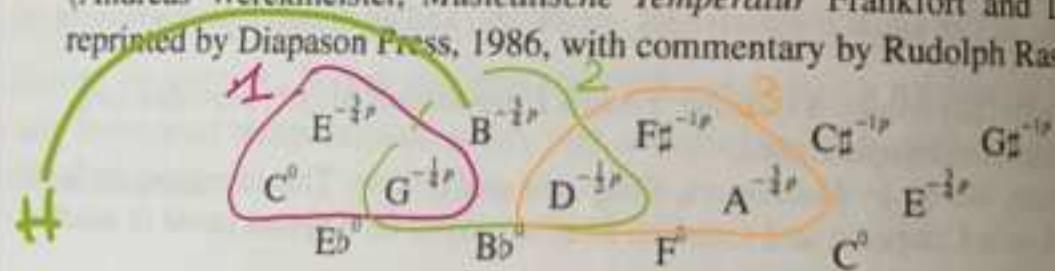
(Andreas Werckmeister, *Musicalische Temperatur* Frankfort and Leipzig, 1691,
reprinted by Diapason Press, 1986, with commentary by Rudolph Rasch)



this temperament . . .

Werckmeister III (Correct Temperament No. 1)

(Andreas Werckmeister, *Musicalische Temperatur* Frankfort and Leipzig, 1691,
reprinted by Diapason Press, 1986, with commentary by Rudolph Rasch)



this temperament is based on the Pythagorean Comma

C-Dur Dreiklang

$$C^{\circ} \quad E^{-\frac{3}{4}p} \quad G^{\frac{1}{4}p}$$

Soll 1st

Quinte	0	$-\frac{1}{4}p$	5,9 cent
Große Terz	-21,5 cent	$-17,7$ cent	~4 cent
Kleine Terz	+21,5 cent	11,8 cent	~10 cent

G-Dur Dreiklang

$$G^{-\frac{1}{4}p} \quad H^{-\frac{3}{4}p} \quad D^{-\frac{1}{2}p}$$

Soll 1st

Quinte	0	$-\frac{1}{4}p$	5,9 cent
Große Terz	-21,5 cent	$-\frac{1}{2}p = 11,8$	~10 cent
Kleine Terz	+21,5 cent	$+\frac{1}{4}p = 5,9$	~15 cent

D-Dur Dreiklang

$$D^{-\frac{1}{2}p} - F^{\#} - A^{-\frac{3}{4}p}$$

Soll 1st

Quinte	0	$-\frac{1}{4}p$	5,9 cent
Große Terz	-21,5	$-\frac{1}{2}p = 11,8$	~10 cent
Kleine Terz	+21,5	$+\frac{1}{4}p = 5,9$	~15 cent

Pythagoreische Komma:

23,5 cents

$\frac{1}{2} PK : 11,8$ cents

$\frac{1}{4} PK : 5,9$ cent

$\frac{3}{4} PK : 17,7$ cent

Syntomische Komma
21,5 cent

Werckmeister III (Correct Temperament No. 1)

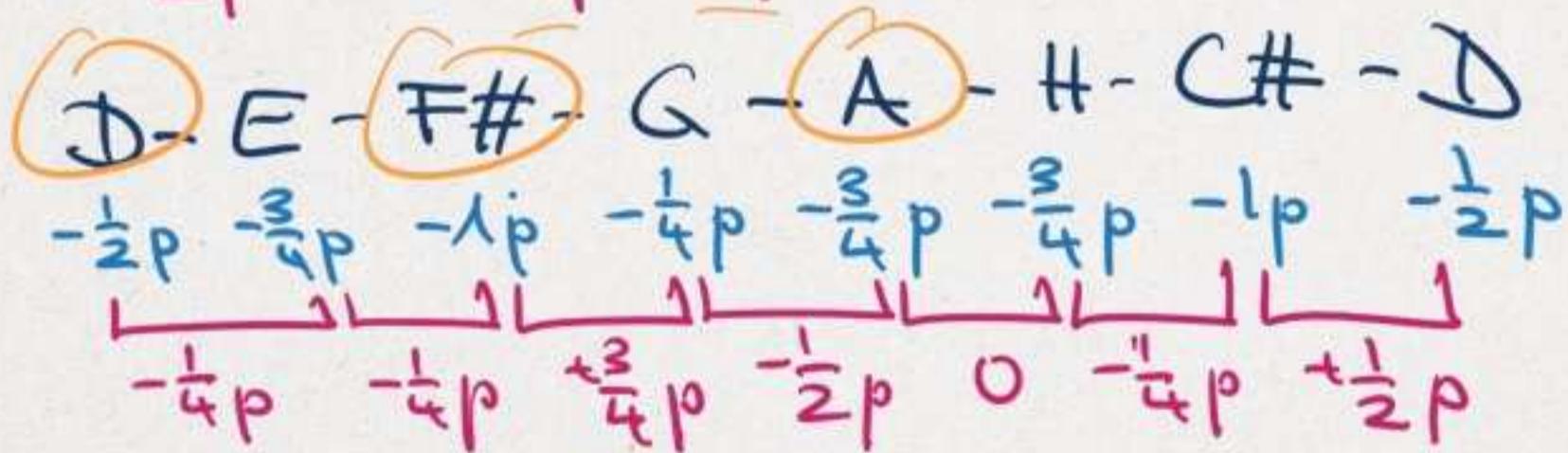
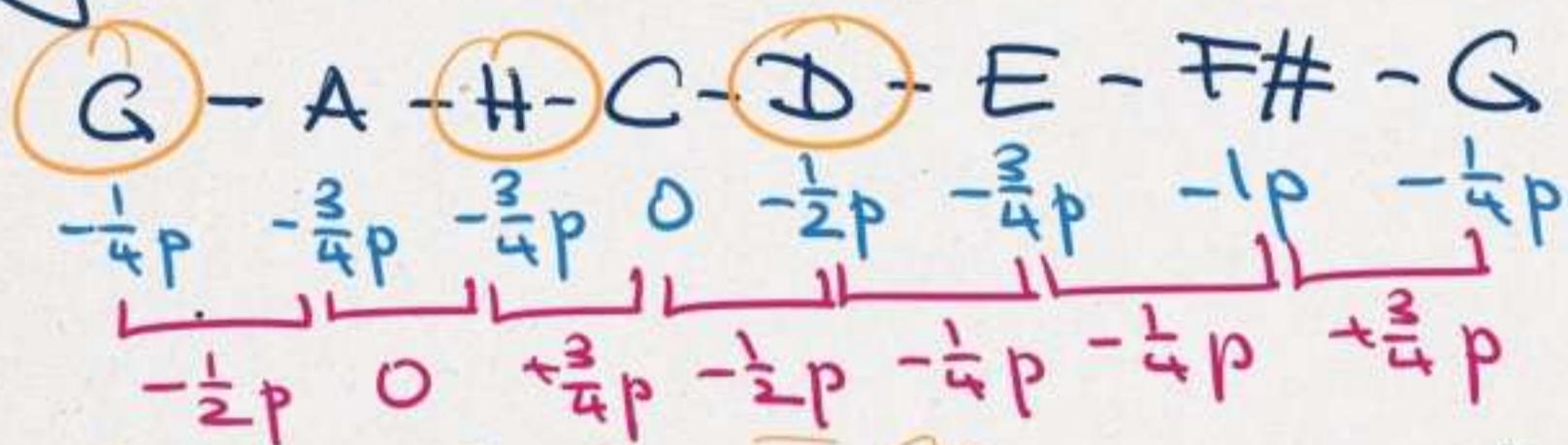
(Andreas Werckmeister, *Musicalische Temperatur* Frankfort and Leipzig, 1691,
reprinted by Diapason Press, 1986, with commentary by Rudolph Rasch)

$E^{-\frac{1}{4}P}$	$B^{-\frac{1}{4}P}$	$F\sharp^{-\frac{1}{4}P}$	$C\sharp^{-\frac{1}{4}P}$	$G\sharp^{-\frac{1}{4}P}$
C^0	$G^{-\frac{1}{4}P}$	$D^{-\frac{1}{4}P}$	$A^{-\frac{1}{4}P}$	$E^{-\frac{1}{4}P}$
$E\flat^0$	$B\flat^0$	F^0	C^0	

this temperament is

C-Dur blingt doch sechlich anders als G-Dur-Dreiklang
Dreiklang und D-Dur-Dreiklang

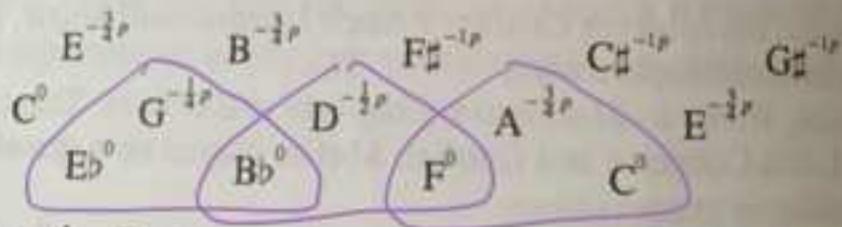
Aber G-Dur und D-Dur Dreiklang sind
gleich, aber nicht die volle Tonleiter!



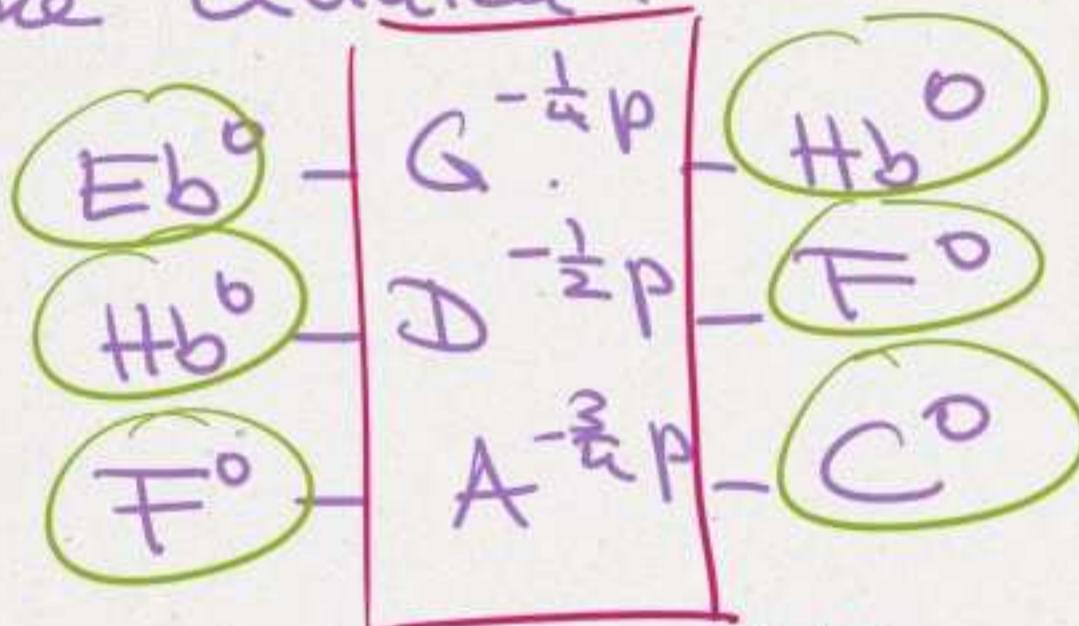
Die Tonleitern sind komplett unterschiedlich.

Werckmeister III (Correct Temperament No. 1)

(Andreas Werckmeister, *Musicalische Temperatur* Frankfort and Leipzig, 1691,
reprinted by Diapason Press, 1986, with commentary by Rudolph Rasch)



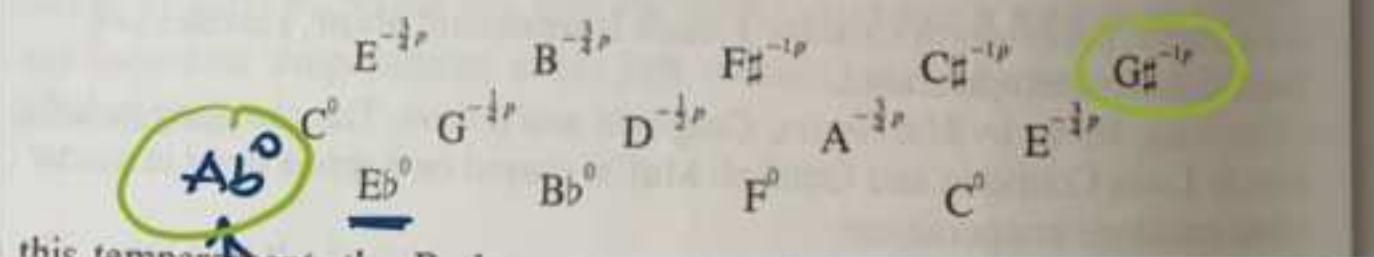
Die Tonaufteile Eb-Dur, Hb-Dur und
F-Dur haben in dieser Strukturung
reine Quinten:



Alle drei Dreiklänge haben unvergleichlich
große Terzen und auch noch
verschiedlich.

Werckmeister III (Correct Temperament No. 1)

(Andreas Werckmeister, *Musicalische Temperatur* Frankfort and Leipzig, 1691, reprinted by Diapason Press, 1986, with commentary by Rudolph Rasch)



Also ist das Ab in der Werckmeister III - Stimmung pythagoräische gestimmt und das G♯ ist um ein pythagoräisches Komma höher als Ab liegt.

Da in der pythagoräischen Stimmung das G♯ exakt ein pythagoräisches Komma höher als Ab liegt, sind also

$$Ab^{\circ} = G\sharp^{-1}P$$

D.h. in der Werckmeister III - Stimmung schließt sich der Quintenzirkel.

In wohl-temperierte Stimmungen sind alle
 Tonarten leicht
 anders und
 können die
 Prinzip verdeckt
 aender unter
 schieden werden.

Man kann daher
 diese (vielleicht)
 nicht ganz
 objektiv) eben-
 troule bedau-
 bug
 zuweilen.

C major	Completely pure. Its character is: innocence, simplicity, naivety, children's talk.
C minor	Declaration of love and at the same time the lament of unhappy love. All languishing, longing, sighing of the lovesick soul lies in this key.
D major	A leering key, degenerating into grief and rapture. It cannot laugh, but it can smile; it cannot howl, but it can at least grimace its crying. Consequently only unusual characters and feelings can be brought out in this key.
D minor	Penitential lamentation, intimate conversation with God, the friend and help-meet of life; sighs of disappointed friendship and love lie in its radius.
E major	The key of triumph, of Hallelujahs, of war-cries, of victory-rejoicing. Thus, the inviting symphonies, the marches, holiday songs and heaven-rejoicing choruses are set in this key.
E minor	Melancholy womanliness, the spleen and humours brood.
F major	Feelings of the anxiety of the soul's deepest distress, of brooding despair, of blackest depression, of the most gloomy condition of the soul. Every fear, every hesitation of the shuddering heart, breathes out of horrible E minor. If ghosts could speak, their speech would approximate this key.
F minor	The key of love, of devotion, of intimate conversation with God; through its three flats [1789: according to Euler] expressing the holy trinity.
G major	Noisy shouts of joy, laughing pleasure and not yet complete, full delight lies in E major.
G minor	Naive, womanly, innocent declaration of love, lament without grumbling; sighs accompanied by few tears; this key speaks of the imminent hope of resolving in the pure happiness of C major. Since by nature it has only one colour, it can be compared to a maiden, dressed in white, with a rose-red bow at her breast. From this key one steps with inexpressible charm back again to the fundamental key of C major, where heart and ear find the most complete satisfaction.
A major	Complaisance and calm.
A minor	Deep depression, funereal lament, groans of misery and longing for the grave.
B major	Triumph over difficulty, free sigh of relief uttered when hurdles are surmounted; echo of a soul which has fiercely struggled and finally conquered lies in all uses of this key.
B minor	A gloomy key: it tugs at passion as a dog biting a dress. Resentment and discontent are its language. It really does not seem to like its own position: therefore it languishes ever for the calm of A major or for the triumphant happiness of D major.
C major	Everything rustic, idyllic and lyrical, every calm and satisfied passion, every tender gratitude for true friendship and faithful love, - in a word, every gentle and peaceful emotion of the heart is correctly expressed by this key. What a pity that because of its seeming lightness it is so greatly neglected nowadays...
C minor	Discontent, uneasiness, worry about a failed scheme; bad-tempered gnashing of teeth; in a word: resentment and dislike.
D major	The key of the grave. Death, grave, putrefaction, judgement, eternity lie in its radius.
D minor	Grumbler, heart squeezed until it suffocates; wailing lament which sighs in double sharps, difficult struggle; in a word, the colour of this key is everything struggling with difficulty.
E major	This key includes declarations of innocent love, satisfaction with one's state of affairs; hope of seeing one's beloved again when parting; youthful cheerfulness and trust in God.
E minor	Pious womanliness and tenderness of character.
F major	Cheerful love, clear conscience, hope, aspiration for a better world.
F minor	A quaint creature, often dressed in the garment of night. It is somewhat surly and very seldom takes on a pleasant countenance. Mocking God and the world; discontented with itself and with everything; preparation for suicide sounds in this key.
G major	Strongly coloured, announcing wild passions, composed from the most glaring colours. Anger, rage, jealousy, fury, despair and every emotion of the heart lies in its sphere.
G minor	This is as it were the key of patience, of calm awaiting one's fate and of submission to divine dispensation. For that reason its lament is so mild, without ever breaking out into offensive murmuring or whimpering. The use of this key is rather difficult for all instruments; therefore so few pieces are found which are expressly set in this key.
Key characteristics, from Christian Schubart, <i>Ideen zu einer Ästhetik der Tonkunst</i> , written 1784, published 1806, translated by Rita Steblin.	