MATHEMATIK & MUSIK

ZEHNTE VORLESUNG X

27. Juni 2022

REINE STIMMUNGEN

Pythagoräische Stimmung:

note	C	D	E	F	G	A	B	C
ratio	1:1	9:8	81:64	4:3	3:2	27:16	243:128	2:1
cents	0.000	203.910	407.820	498.045	701.955	905.865	1109.775	1200.000

Dreiklang X-Y-Z:

- Grundtonbezeichnungen im Abstand 2
- DUR falls X-Y vier HTS
  Y-Z drei HTS

Dur-Dreiklang heißt rein falls X-Y $\frac{5}{4}$ und Y-Z $\frac{6}{5}$.

I Tonika zu X: Dur-Dreiklang auf X

IV Subdominante zu X: Dur-Dreiklang auf Y, wobei Y drei Grundtonbezeichnungen und 5 HTS höher ist

V Dominante zu X: Dur-Dreiklang auf Z, wobei Z vier Grundtonbezeichnungen und 7 HTS höher ist.

Stimmung heißt REIN für X falls Tonika, Subdominante und Dominante rein sind.

note	C	D	E	F	G	A	~~B~~ H	C
ratio	1:1	9:8	~~81:64~~	4:3	3:2	~~27:16~~	~~243:128~~	2:1
cents	0.000	203.910	~~407.820~~	498.045	701.955	~~905.865~~	~~1109.775~~	1200.000

E: 5:4, 386,314

A: 5:3, 884,359

H: 15:8, 1088,269

Reine C-Stimmung.

Wichtige Bemerkung:

Falls Y eine Quinte über X liegt,
so ist

die Tonika über Y die Dominante über X
die Subdominante über Y die Tonika über X

Bei Grundton C

Tonika	I	C – E – G
Subdominante	IV	F – A – C
Dominante	V	G – H – D.

Falls eine Stimmung bereits rein für X ist und Y ist eine Quinte über X, so sind die Tonika und Subdominante über Y bereits rein und wir müssen uns nur um die Dominante über Y kümmern.

$\underline{\mathrm{I}}$: $\boxed{G}$ - H - $\underline{D}$ ⟵ }
$\underline{\mathrm{IV}}$: C - E - G ⟵ } automatisch bereits rein
$\underline{\mathrm{V}}$: D - F# - $\boxed{A}$

Vorteil hier ist, daß F# ein neuer Ton ist, den wir frei bestimmen können:
Nämlich große Terz über D

D
↓
$$\frac{9}{8} \cdot \frac{5}{4} = \frac{45}{32}$$

Dann ist D - F# eine große Terz.
Leider ist aber F# - A keine kleine Terz!

$$\frac{45}{32} \qquad \frac{5}{3}$$

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{32}{45} = \frac{32}{27} \neq \frac{6}{5}.$$

Der Dreiklang D - F# - A hat nicht einmal eine Quinte zwischen D und A!

Abstand D - A $\quad \frac{5}{3} \cdot \frac{8}{9} = \frac{40}{27} \neq \frac{3}{2}.$

Wie weit sind $\frac{40}{27}$ und $\frac{3}{2}$ denn voneinander entfernt?

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{27}{40} = \frac{81}{80}$$

Das ist das syntonische Komma.

Wir haben einige Quinten auf einmal um genau den Betrag verstimmt, der die Terzen rein gemacht hatte.

Definition Eine Stimmung heißt schwach rein für X falls alle drei Primärdreiklänge über X schwach rein sind, d.h. der Abstand zw. dem unteren und mittleren Ton ist eine große Terz.

Bemerkung Mit F# auf $\frac{45}{32}$ erhalten wir eine Stimmung, die rein für C ist und schwach rein für G.

THEOREM Ist eine Stimmung rein für X und ist Z eine Quinte über X, so kann die Stimmung nicht rein für Z sein.

Beweis Primärdreiklänge für X:

$$\begin{array}{llll}
\text{I} & X - & Y - & Z \; * \\
 & 0 & 4 & 7 \\
\text{IV} & X' - & Y' - & Z' = X \\
 & 5 & 9 & 12 = 0 \\
\text{V} & Z = X'' - & Y'' - & Z'' \\
 & 7 & 11 & 14 = 2
\end{array}$$

Nach Annahme sind die Klänge alle rein, also $Y : X = \frac{5}{4}$, $Z : X = \frac{3}{2}$, $Y' : X' = \frac{5}{4}$ usw.

Wie sehen die Primärdreiklänge für Z aus?

$$\begin{array}{llll}
\text{I} & Z - & Y'' - & Z'' \\
 & 7 & 11 & 2 \\
\text{IV} & X - & Y - & Z \\
 & 0 & 4 & 7 \\
\text{V} & Z'' & * & Y' \\
 & 2 & 6 & 9
\end{array}$$

$Z'' : Z = \frac{3}{2}$

$Z : X = \frac{3}{2}$

$Z'' : X = \frac{9}{4}$

$X : Y' = \frac{6}{5}$

Wir errechnen, daß wenn X der Frequenz 1 entspricht, so ist

$$Y' = \frac{5}{3} = 2 \cdot \frac{5}{6}.$$

Aber $Z'' = \frac{9}{8}$.

Also erhalten wir

$$Y' : Z'' = \frac{5}{3} \cdot \frac{8}{9} = \frac{40}{27} \neq \frac{3}{2}$$

Also ist der Dominantdreiklang auf Z nicht rein. Wir können ihn aber schwach rein machen durch geeignete Wahl des mittleren Tons.

q.e.d.

Bisher

C	D	E	F	F#	G	A	H	C
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2

Rein für C,
schwach rein für G.

Können wir dies auf weitere Tonarten ausdehnen?

heißt SCHWACH REIN

z.B. D.

I : D – F# – A ✓ erledigt als $\underline{\text{V}}$ von G

$\underline{\text{IV}}$: G – H – D ✓ rein (weil Tonika von G)

$\underline{\text{V}}$: $\underbrace{\text{A – C\#}}_{\text{4 HTS}}$ – E

Wir können D schwach rein machen, indem wir C# setzen auf

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{25}{12}$$

$$\rightsquigarrow \frac{25}{24}$$ in der richtigen Oktave

Und weiter:

I A - C# - E
IV D - F# - A
V E - $\boxed{G\#}$ - H

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} = \frac{25}{16}$$

I E - G# - H
IV A - C# - E
V H - $\boxed{D\#}$ - F#

$$\frac{15}{8} \cdot \frac{5}{4} = \frac{75}{32} \rightsquigarrow \frac{75}{64}$$

I H - D# - F#
IV E - G# - H
V F# - $\boxed{A\#}$ - C#

$$\frac{45}{32} \cdot \frac{5}{4} = \frac{225}{128}$$

C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	H	C
1	$\frac{25}{24}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{75}{64}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{225}{128}$	$\frac{15}{8}$	2

Die Stimmung (reine Stimmung) ist rein für C und schwach rein für G, D, A, E und H.

Wie sieht es mit F aus?

Falls das Instrument, auf welchem wir spielen, keine Enharmonie hat; also

$$Hb = A\#,$$

dann sind die Primärdreiklänge für F:

I	F - A - C	[kein Problem, weil IV bei C]
IV	$\boxed{Hb - D - F}$	
V	C - E - G	[kein Problem, weil I bei C]

Dies ist problematisch.

Falls $Hb = A\#$:

$A\#\ \frac{225}{128} \qquad D\ \frac{9}{8} \qquad F\ \frac{4}{3}$

D : A#
$$\frac{9}{8}\cdot\frac{128}{225}\cdot 2 = \frac{\cancel{3^2}}{\cancel{2^3}}\,\frac{\cancel{2^8}^{\,2^5}}{5^2\cdot\cancel{3^2}}$$

$$= \frac{2^5}{5^2} = \frac{32}{25} \neq \frac{5}{4}$$

Zwei Optionen:

Option 1 Wir geben A# auf und setzen Hb so an, daß der Abstand Hb–D gerade eine große Terz ist.

$$\frac{9}{8}$$

$$\text{Hb: } \frac{9}{8}\cdot\frac{4}{5} = \frac{9}{10} \rightsquigarrow \boxed{\frac{9}{5}}$$

mit Hb $= \frac{9}{5}$ wird die Stimmung schwach rein für F, verliert aber die schwache Reinheit für H.

C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	Hb	H	C
1	$\frac{25}{24}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{75}{64}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{5}{3}$	$\boxed{\frac{9}{5}}$	$\frac{15}{8}$	2

Diese Stimmung ist rein für C, schwach rein für G, D, E, A, F, aber nicht mehr für H.

Option 2

Wir belassen Hb als Quinte unter F, also $\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{9} \rightsquigarrow \frac{16}{9}$

und definieren D als

$$\frac{16}{9} \cdot \frac{5}{4} = \frac{80}{32} \rightsquigarrow \frac{80}{64}$$

Damit hätten wir erzwungen, daß F rein wird, aber bereits C ist nur noch schwach rein, weil G-A-D (Dominante von C) nicht mehr rein ist.

FAZIT Reine Stimmungen sind immer nur rein für eine Tonart und das Instrument müsste umgestimmt werden, falls man die Tonart wechselt.

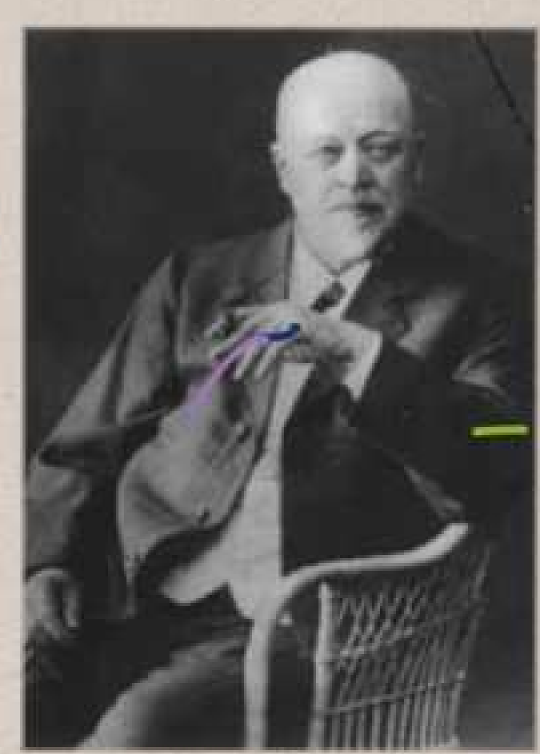
EITZ – Notation

Wir schreiben Tonbeschreibungen mit Exponenten:

der Exponent 0 heißt pythagoräische Stimmung

der Exponent $\pm\alpha$ heißt um ein α-faches syntonisches Komma erhöht oder erniedrigt

der Exponent $\pm\alpha p$ heißt um ein α-faches pythagoräisches Komma erhöht oder erniedrigt.



Carl EITZ
1848 – 1924

PYTHAGOR. STIMMUNG

$$C^0 - D^0 - E^0 - F^0 - G^0 - A^0 - H^0 - C^0$$

REINE STIMMUNG

$$C^0 - D^0 - E^{-1} - F^0 - G^0 - A^{-1} - H^{-1} - C^0$$

Überprüfen: $E^0 \quad \frac{81}{64} \qquad E^0 : E^R = \frac{81}{64} \cdot \frac{4}{5}$

Reine Stimmung $\quad E^R \quad \frac{5}{4} \qquad = \frac{81}{80}$

Genauso für A und H.

$$C^0 - D^0 - E^{-1} - F^0 - G^0 - A^{-1} - H^{-1} - C^0$$

In dieser Notation kann man einfach erkennen, ob ein Dreiklang rein ist:

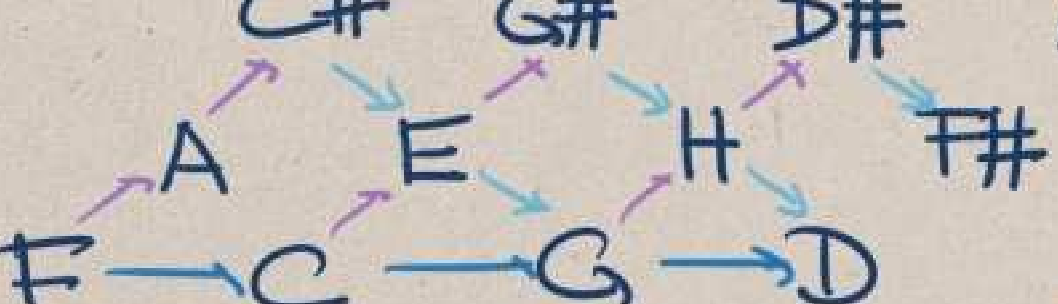
$$X^\alpha - Y^\beta - Z^\gamma$$

X–Z ist reine Quinte gdw $\alpha = \gamma$

X–Y ist große Terz gdw $\beta = \alpha - 1$

Also ist X–Y–Z rein gdw $\alpha = \gamma$, $\beta = \alpha - 1$.

Die Eitznotation wird oft auch graphisch in Quinten und Terzen anordnet:



hier heißt horizontal: eine Quinte nach oben

schräg nach oben: große Terz nach oben

schräg nach unten: kleine Terz nach oben

$$
\begin{array}{cccc}
C\#^{-2} & G\#^{-2} & D\#^{-2} & A\#^{-2} \\
A^{-1} & E^{-1} & H^{-1} & F\#^{-1} \\
F^{0} & C^{0} & G^{0} & D^{0}
\end{array}
$$

Die reine Stimmung in Eitz-Notation.

Beispiel

Pythagoräisches F# : $\frac{3^6}{2^9}$

— " — C# : $\frac{3^7}{2^{11}}$

Syntonisches Komma $\frac{81}{80} = \frac{3^4}{2^4 \cdot 5}$

$$\frac{3^6}{2^9}\,\frac{2^4 \cdot 5}{3^4} = \frac{3^2 \cdot 5}{2^5} = \frac{9 \cdot 5}{2^5} = \boxed{\frac{45}{32}}$$

das reine F#

$$\frac{3^7}{2^{11}} \cdot \frac{2^8 \cdot 5^2}{3^8} = \frac{5^2}{2^3 \cdot 3} = \frac{25}{24},$$

das reine C#

AUSBLICK

- Reine Stimmungen sind stets nur rein für eine Tonart und müßten für andere Tonarten umgestimmt werden.
- Idee: Kann man einen Kompromiß finden: mehrere Tonarten allesamt nicht perfekt, aber hinreichend gut stimmen?

→ TEMPERIERTE STIMMUNGEN

(von "temperare" mäßigen)