

MATHEMATIK & MUSIK

VIII

Achte Vorlesung

13. Juni 2022

Die Pythagoräische Tonleiter



Zwölf HALBTONSCHRITTE
(HTS) HTS

Gleichstufige Stimmung hat
 $\sqrt[12]{2}$ für alle HTS.

⇒ keine Harmonie!

VORLESUNG

VII

Seite 10

Stattdessen

Die Idee der Pythagoräer war es, die Töne der Tonleiter so zu definieren, daß die Quinten notwendigerweise auftröcken.

Dies macht man, indem man die Töne über die Quinten (den Quintenzirkel) definiert.

Man identifiziert das Intervall, welches dem 7. Halbtone Schritt entspricht mit der Quinte.



Ganztonschritte (GTS)

Halbtonschritte (HTS)

C-D-E-F-G-A-H-C

GTS GTS HTS GTS GTS GTS HTS
2 2 1 2 2 2 1

Grund-Tonbezeichnungen.

Die Tonbezeichnung besteht aus einer Grundtonbezeichnung und einer endlichen Folge von Symbolen # und b
HTS erhöht
b HTS erniedrigt

VERFAHREN

Quintenstimmung nach oben

Sei X eine Tonbezeichnung.

Schritt 1

Bestimme die Grundtonbezeichnung von X [$\#$ weglassen]

Zähle von dieser VIER Bezeichnungen nach oben.

[z.B. $E-F-G-A-H$]
1 2 3 4

Wir nennen diese Grund-Tonbezeichnung Y .

Schritt 2

Zähle die HTS von X bis Y .

Anhand der Tabelle. Berücksichtige die Erhöhung von X durch $\#$.

[z.B. $E\#-F-G-A-H$]
1 2 2 2 $Y := H$

7 HTS ; da $E\#$ erhöht ist,
also nur 6 HTS]

Beobachtung : Diese Zahl ist immer ≤ 7 .

Der einzige Vierverschritt mit 6 HTS ist $H-F$; alle anderen haben 7. Und $\#$ e verringern die Zahl.

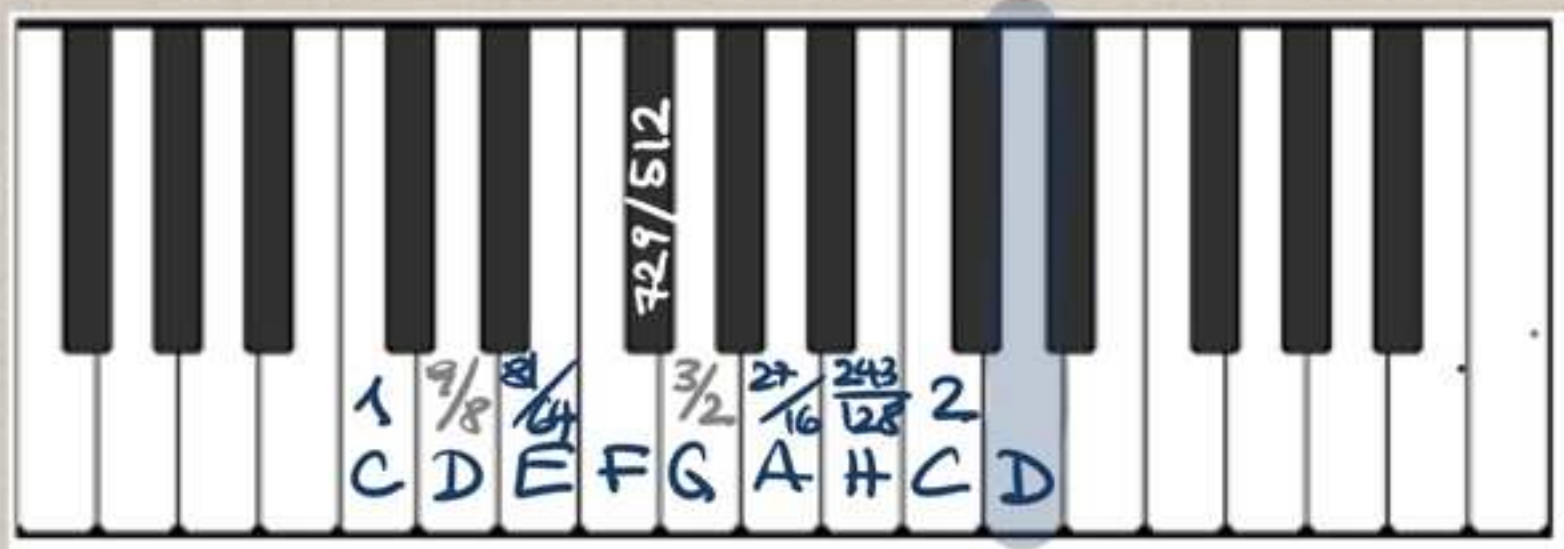
3 Wir bestimmen die Tonbezeichnung
der Quarte durch:

US10.

Angenommen, die Frequenz

$$Y := D$$
$$= 6 \text{ HTS}$$

Jaker ist die Tonbezeichnung
D# ("dis").



Bereits in VL VII hatten wir die ersten zwei Quinten nach oben berechnet:

$$\frac{3}{2} \quad C \quad \text{Freq. } \nu \rightsquigarrow \frac{3}{2} \nu$$

Tonbezeichnung: G

$$G \quad \frac{3}{2} \nu \rightsquigarrow \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \nu = \frac{9}{4} \nu$$

Da $\frac{9}{4} \notin [1, 2]$, müssen wir nach unten oktavieren und erhalten

$$\frac{9}{8} = \frac{3^2}{2^3}$$

$$\frac{9}{4} \cdot \frac{1}{2} \nu = \frac{9}{8} \nu$$

Tonbezeichnung: D.

BIS HIER ALLES WIEDERHOLUNG.

$$\frac{27}{16} = \frac{3^3}{2^4}$$

$$\frac{9}{8} \nu \rightsquigarrow \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{8} \nu = \frac{27}{16} \nu$$

D-E-F-G-A
 $\underbrace{\quad}_2 \underbrace{\quad}_1 \underbrace{\quad}_2 \underbrace{\quad}_2 \quad 7$

Tonbezeichnung: A

A

$$\frac{27}{16} \nu \rightsquigarrow \frac{3}{2} \cdot \frac{27}{16} \nu = \frac{81}{32} \nu$$

$$\frac{81}{64} = \frac{3^4}{2^6}$$

Da $\frac{81}{32} \notin [1, 2]$, oktavieren wir nach unten und erhalten $\frac{81}{64}$.

$$A-H-C-D-E \xrightarrow{2 \setminus 1 \setminus 2 \setminus 2} 7$$

Tonbezeichnung: E

$$\frac{81}{64} \nu \rightsquigarrow \frac{3}{2} \cdot \frac{81}{64} = \frac{243}{128}$$

$$E-F-G-A-H \xrightarrow{1 \setminus 2 \setminus 2 \setminus 2} 7$$

Tonbezeichnung: H

H

$$\frac{243}{128} \nu \rightsquigarrow \frac{3}{2} \cdot \frac{243}{128} \nu = \frac{729}{256} \nu$$

$$\frac{729}{512} = \frac{3^6}{2^9}$$

$\frac{729}{256} \notin [1, 2]$, also oktavieren wir und erhalten

$$\frac{729}{512}$$

$$H-C-D-E-F \xrightarrow{1 \setminus 2 \setminus 2 \setminus 1} 6$$

Tonbezeichnung: F# (fis)

BEOBACHTUNG

Alle Verhältnisse sind von der Form $\frac{3^k}{2^l}$ für geeignete k, l .

SATZ Falls ein Ton durch Quicken-
stimmung nach oben aus k einem
Grundton mit Frequenz ν ent-
steht, so gibt es k, l mit

$$\nu' = \frac{3^k}{2^l} \nu$$

wobei ν' die Frequenz des ent-
stehenden Tons ist.

Beweis Induktion:

Grundton: $\nu = \frac{3^0}{2^0} \cdot \nu$.

Falls $\nu' = \frac{3^k}{2^l} \nu$ und ich gehe eine
Quinte hoch, so erhalte ich

$\frac{3^{k+1}}{2^{l+1}} \nu$. Falls oktaviert werden

muss, so entsteht $\frac{3^{k+1}}{2^{l+1}} \cdot \frac{1}{2} \nu = \frac{3^{k+1}}{2^{l+2}} \nu$.
q.e.d.



$$1 \quad \frac{9}{8} \quad \frac{81}{64} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{27}{16} \quad \frac{243}{128} \quad 2$$

Berechnung der Abstände

$$C-D : \frac{9}{8} : 1 = \frac{9}{8}$$

Dies ist ein harmonisches Intervall: es entsteht zwischen der 7. und 8. Oberton.
[SEKUNDE]

$$\begin{aligned} D-E : \frac{81}{64} : \frac{9}{8} &= \frac{81}{64} \cdot \frac{8}{9} \\ &= \frac{3^4}{2^6} \cdot \frac{2^3}{3^2} = \frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G-A : \frac{27}{16} : \frac{3}{2} &= \frac{27}{16} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3^3}{2^4} \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8} \end{aligned}$$

$$A-H : \frac{243}{128} : \frac{27}{16} = \frac{3^5}{2^7} \cdot \frac{2^4}{3^3} = \frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8}$$

BEOBACHTUNG Alle QTS, die wir bisher haben, haben exakt den gleichen (harmonischen) Abstand $\frac{9}{8}$.

Abstand H-C:

$$\frac{243}{128} \cdot 2$$

$$2 \cdot \frac{243}{128} = 2 \cdot \frac{128}{243} = 2 \cdot \frac{2^7}{3^5} = \frac{2^8}{3^5} = \frac{256}{243}$$

Man beachte: der HTS H-C ist keine exakte Halbierung des GTS $9/8$!
Eine exakte Halbierung wäre $\sqrt{9/8}$.

Was geschieht wenn ich zwei HTS mit einem GTS vergleiche?

$$\begin{array}{c} \text{HTS} \\ \frac{256}{243} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{GTS} \\ \frac{9}{8} \end{array}$$

$$\frac{9}{8} = 1,125$$

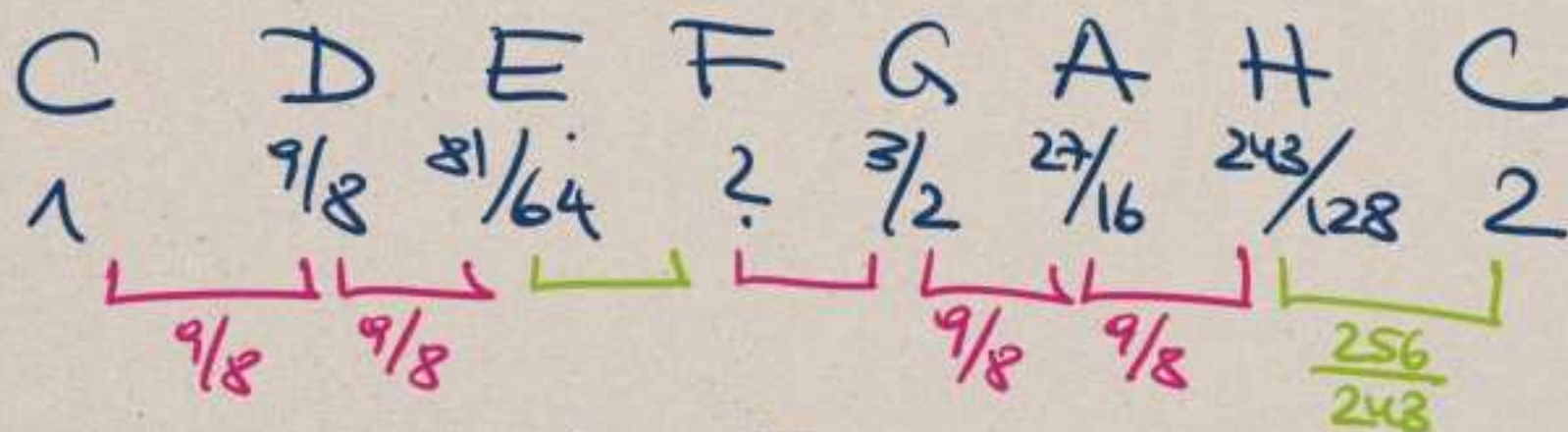
$$\rightarrow \frac{2^8}{3^5} \cdot \frac{2^8}{3^5} = \frac{2^{16}}{3^{10}} = \frac{65536}{59049}$$

$$\approx 1,10985$$

Fazit: Wenn ich zwei HTS nach oben
 gehe, liege ich ein einziges Stück
 unterhalb des GTS.

Wir sind darüber nicht überrascht, weil
 wir bereits gesehen hatten, daß wir
 keine gleichshifige (= gleiche Abstände
 für HTS) Streuung mit rationalen
 Zahlen erhalten.

Was ist mit F?



Wunsch wäre, daß F gerade
 $\frac{81}{64} \cdot \frac{256}{243}$ und $\frac{3}{2} \cdot \frac{8}{9}$
 ist.

Ist das möglich?

$$\frac{81}{64} \cdot \frac{256}{243} = \frac{3^4}{2^6} \cdot \frac{2^8}{3^5} = \frac{2^2}{3} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{8}{9} = \frac{3^1}{2^1} \cdot \frac{2^3}{3^2} = \frac{2^2}{3} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

Daher muß F gerade $\frac{4}{3}$ sein.

$$\begin{array}{cccccccc} C & - & D & - & E & - & F & - & G & - & A & - & H & - & C \\ 1 & & \frac{9}{8} & & \frac{81}{64} & & \frac{4}{3} & & \frac{3}{2} & & \frac{27}{16} & & \frac{243}{128} & & 2 \end{array}$$

Pythagoräische Tonleiter

Mathematische Eigenschaften:

1. Alle GTS sind gleich.
2. Alle HTS sind gleich.
3. Zwei HTS $\neq$ ein GTS.
4. Alle Quinten sind rein ($\frac{3}{2}$).

Stimme F auch durch: Vom Grundton C eine Quinte nach unten gehen:

1. $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$, da $\frac{2}{3} \notin [1, 2]$ müssen wir noch oben oktavieren, also verdoppeln: $2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

Quintenstimmung nach unten

Falls Tonbezeichnung X gegeben mit
Frequenz ν , so:

Schritt 1 Zahl vier Grundtöne nach unten,
erhalte Y .

Schritt 2 Zahl HIS (berücksichtige evtl.
Erhöhung der Grundtöne von X)
Dies liefert Zahl ≤ 7 .

Schritt 3 Tonbezeichnung für

Aussprache:

"-es"
"-eses"
"-eseses"

$\frac{2}{3} \nu$ ist
 Y falls Zahl = 7
 Yb falls Zahl = 6
 Ybb falls Zahl = 5

usw.

Ausnahmen

Hb wird "B" ausgesprochen
 Hbb wird "Bes" ausgesprochen
 Eb wird "Es" ausgesprochen
 Ebb wird "Eses" ausgesprochen

Also stimmen wir von C mit
Quinten nach unten:

$$C \rightsquigarrow \frac{2}{3} C,$$

da $\frac{2}{3} \notin [1, 2]$, oktavieren wir
und erhalten $\frac{4}{3} = \frac{2^2}{3^1}$.

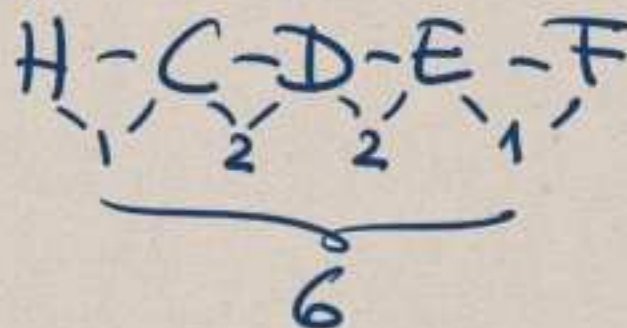
Tonbezeichnung: F

$$F \rightsquigarrow \frac{4}{3} F \rightsquigarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} F = \frac{8}{9} F$$

Da $\frac{8}{9} \notin [1, 2]$, müssen wir oktavieren.

$$\frac{16}{9} = \frac{2^4}{3^2}$$

Tonbezeichnung



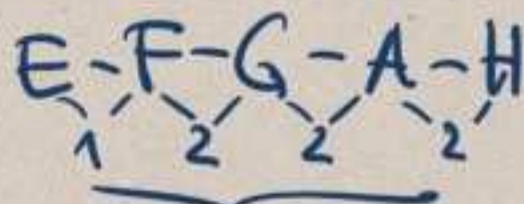
Daher Hb.

$$Hb \quad \frac{16}{9} \rightsquigarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{16}{9} = \frac{32}{27} \in [1, 2]$$

$$\frac{32}{27} = \frac{2^5}{3^3}$$

Tonbezeichnung

Eb



-1 wegzub
= 6

$$Eb \quad \frac{2^5}{3^3} \rightsquigarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{2^5}{3^3} = \frac{2^6}{3^4} = \frac{64}{81} \notin [1,2]$$

$$\frac{128}{81} = \frac{2^7}{3^4}$$

Tonbezeichnung: Ab

$$Ab \quad \frac{2^7}{3^4} \rightsquigarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{2^7}{3^4} = \frac{2^8}{3^5} = \frac{256}{243}$$

Diese Zahl kennen wir, das ist unser HTS.

Tonbezeichnung: Db

$$Db: \quad \frac{2^8}{3^5} \rightsquigarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{2^8}{3^5} = \frac{2^9}{3^6} = \frac{512}{729}$$

~~A~~
[1,2]

$$\text{Oktavier} \quad \frac{1024}{729} = \frac{2^{10}}{3^6}$$

Tonbezeichnung: Gb

Satz Erhalte ich einen Ton durch
Quintenstimmung nach unten von
einer Grundfrequenz ν , so ist
die Frequenz

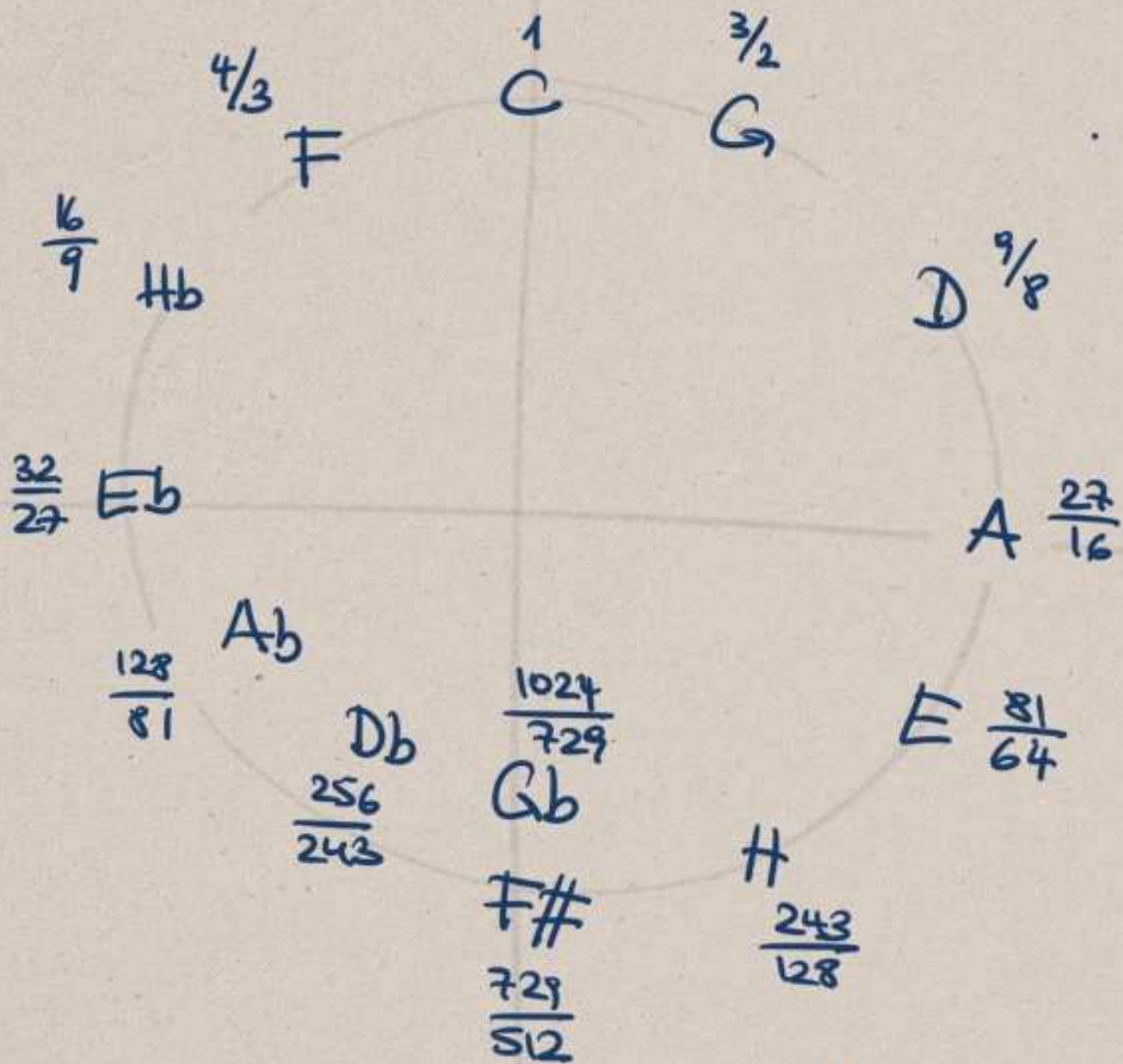
$$\frac{2^k}{3^l} \cdot \nu$$

für geeignete k und l .

Beweis Exakt analog zum Beweis bei
der Quintenstimmung nach oben.

Korollar Ein Ton, den ich durch Quinten-
stimmung nach oben erzeuge, kann
nie mit einem Ton identisch
sein, den ich durch Quintenstimmung
nach unten erzeuge.

Der QUINTENZIRKEL ist also gar kein
Zirkel, sondern eine unendliche
Quintenspirale.



Auf der Klaviertastatur identifizieren wir die Töne Gb und F#, auch wenn diese eigentlich unterschiedliche Töne sind.

Wie unterschiedlich sind Gb und F# eigentlich?

$$\text{Gb} \quad \frac{2^{10}}{3^6} = \frac{1024}{729} \approx 1,4046$$

$$\text{F\#} \quad \frac{3^6}{2^9} = \frac{729}{512} \approx 1,4238$$

Also dicht beieinander, aber nicht identisch. Beide liegen dicht bei $\sqrt{2}$, was einleuchtend ist, da hier die Halbierung der Tonleiter liegen muß.

F# ist leicht höher als Gb und das Intervall ist:

$$\frac{3^6}{2^9} : \frac{2^{10}}{3^6} = \frac{3^6}{2^9} \cdot \frac{3^6}{2^{10}} = \frac{3^{12}}{2^{19}}$$

Dieses Intervall heißt

PYTHAGORÄISCHES KOMMA

$$= \frac{531441}{524288}$$

$$\approx 1,0136$$

Das pythagoräische Komma mißt die Differenz, die entsteht, wenn ich in Oktaven nach oben laufe und in Quinden wieder herunter oder umgekehrt.

Aus zahlen-theoretischen Gründen kann dies nicht an der gleichen Stelle werden.

Töne, die sich um ein pythagoräisches Komma unterscheiden, nennen wir eukharmonisch.