MATHEMATIK & MUSIK
VORLESUNG VII

30. Mai 2022

TON : einfache Sinusschwingung

$$\sin(2\pi\nu\vartheta)$$

KLANG : Linearkombination / Fourierreihe bestehend aus Harmonischen

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \boxed{\sin(2\pi n\nu\vartheta)}$$

SPEKTRUM : Die Fourierkoeffizienten b_n

Durch die Überschneidung der Obertonreihen entsteht HARMONIE, wenn die Grundtöne in einem kleinen ganzzahligen Verhältnis zueinander stehen.

MUSIKALISCHE PARADOXE

Shepardtonleiter
(Shepard Scale)

	C	D	E	F	G	A	H	C
ν_0	1	2	3	4	5	6	7	8 / 1
$\boxed{2\nu_0}$	8	7	6	5	4	3	2	

Die Grundfrequenz ν_0 bei dem oktavierten C ist gerade das doppelte der Grundfrequenz beim ursprünglichen C.

Der vom Gehirn erwartete Klang an der Stelle des zweiten C klingt fast genau wie der ursprüngliche Klang beim ersten C und erzeugt die Illusion eines unendlichen Anstiegs.

Roger Shepard

Shepard at the ASU SciAPP conference in March 2019

Born	Roger Newland Shepard January 30, 1929 (age 93) Palo Alto, California, United States
Nationality	American

THE JOURNAL OF THE ACOUSTICAL SOCIETY OF AMERICA VOLUME 36, NUMBER 12 DECEMBER 1964

Circularity in Judgments of Relative Pitch

ROGER N. SHEPARD

Bell Telephone Laboratories, Inc., Murray Hill, New Jersey

(Received 23 July 1964)

A special set of computer-generated complex tones is shown to lead to a complete breakdown of transitivity in judgments of relative pitch. Indeed, the tones can be represented as equally spaced points around a circle in such a way that the clockwise neighbor of each tone is judged higher in pitch while the counterclockwise neighbor is judged lower in pitch. Diametrically opposed tones—though clearly different in pitch—are quite ambiguous as to the direction of the difference. The results demonstrate the operation of a "proximity principle" for the continuum of frequency and suggest that perceived pitch cannot be adequately represented by a purely rectilinear scale.

Die pythagoräische Tonleiter

Namen für Intervalle

			Verhältnis	
Grundton	$n=1$	1		
1. Oberton	$n=2$	2	2:1	OKTAVE
2. Oberton	$n=3$	3	3:2	QUINTE
3. Oberton	$n=4$	4	4:3	QUARTE
4. Oberton	$n=5$	5	5:4	GROSSE TERZ
5. Oberton	$n=6$	6	6:5	KLEINE TERZ
6. Oberton	$n=7$	7	7:6	—
7. Oberton	$n=8$	8	8:7	—
8. Oberton	$n=9$	9	9:8	SEKUNDE

OKTAVE (2–4), QUINTE (4–6), OKTAVE (4–8)

Da Zahlenverhältnisse k/l für kleine natürliche Zahlen k und l besonders harmonisch sind, verdienen diese Intervalle besondere Namen.

Bem. 1 Intervalle werden in Verhältnissen von Frequenzen gemessen.

z.B. falls ν der Grundton ist, so ist $\nu' = \frac{6}{5}\nu$ eine Frequenz, die eine kleine Terz höher ist.

Also: Wir multiplizieren die Intervallverhältnisse, wenn wir mehrere Intervalle abschreiten.

z.B. ν Grundton; erst kleine Terz nach oben, dann nochmals Quinte nach oben:

$$\left.\begin{aligned} \nu' &= \frac{6}{5}\nu \\ \nu'' &= \frac{3}{2}\nu' \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \nu'' &= \frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}\nu \\ &= \frac{18}{10}\nu \\ &= \frac{9}{5}\nu. \end{aligned}$$

Bem. 2 Ebenso wenn wir ein Intervall nach unten gehen: wir dividieren durch den Faktor des Intervalls [äquivalent: multiplizieren mit dem Kehrwert.]

Bsp. Eine Quinte von ν Grundton nach unten:

$$\nu' = \frac{\nu}{3/2} = \nu \cdot \frac{2}{3}$$

Also: $\nu = \frac{3}{2}\nu'$.

Bem. 3 Daraus folgt: eine Quinte + eine Quarte ist eine Oktave:

$$\nu' = \frac{3}{2}\nu \;;\; \nu'' = \frac{4}{3}\nu'$$

$$\Longrightarrow \nu'' = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\nu = \frac{12}{6}\nu = 2\nu.$$

Bem. 4 Ebenso: eine große Terz + eine kleine Terz geben eine Quinte:

$$\nu' = \frac{5}{4}\nu \;;\; \nu'' = \frac{6}{5}\nu'$$

$$\Longrightarrow \nu'' = \frac{6}{5}\cdot\frac{5}{4}\nu = \frac{6}{4}\nu = \frac{3}{2}\nu.$$

Bem 5 Zwei Quinten hoch und eine Oktave runter gibt eine Sekunde.

$$\Longrightarrow$$

$$\nu' = \frac{3}{2}\nu \;;\; \nu'' = \frac{3}{2}\nu' \;;\; \nu''' = \frac{1}{2}\nu''$$

$$\nu''' = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\nu = \frac{9}{8}\nu.$$

Bem 6 Daraus folgt auch, daß wir die Oktave nicht in zwei gleiche Intervalle aufteilen können (ohne irrationale Verhältnisse zu verwenden):

Angenommen λ existiert mit:
Zwei Intervalle λ hoch entspricht einer Oktave:

$$\underbrace{\nu' = \lambda\nu \; ; \; \nu'' = \lambda\nu' \implies \nu'' = \lambda\cdot\lambda\cdot\nu = \lambda^2\cdot\nu \quad \text{und} \quad \nu'' = 2\nu}$$

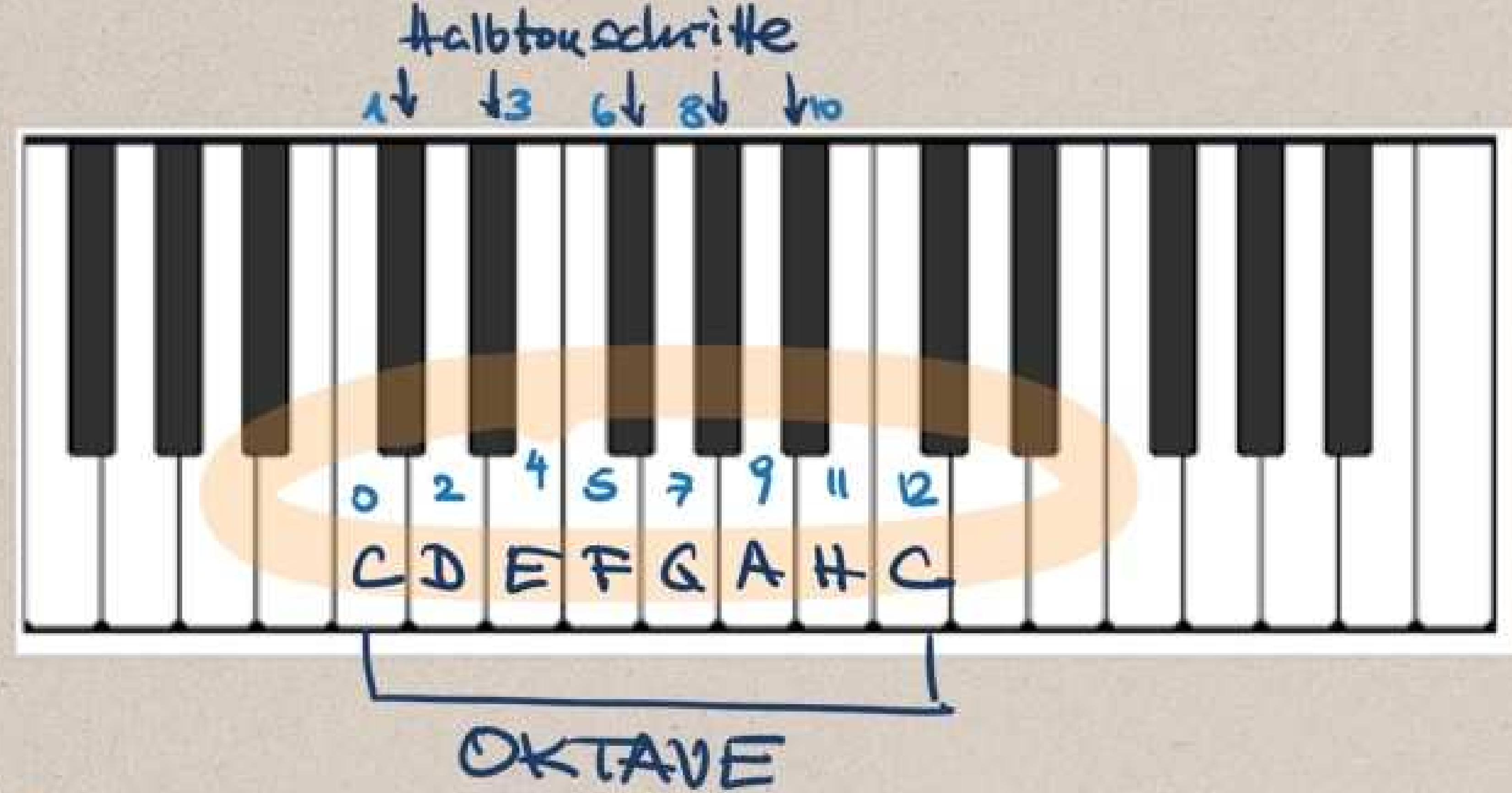
$$\implies \lambda^2 = 2 \implies \lambda = \sqrt{2}.$$

Das Intervall mit Faktor $\sqrt{2}$ ist kein harmonisches Intervall.
Bekannt als TRITONUS

$$\boxed{\text{TRITONUS EST DIABOLUS IN MUSICA.}}$$

Andreas Werckmeister
(1645–1706)
Erwähnt den Tritonus in einem Werk aus dem Jahre 1702.

Die Tonleiter



ÜBLICHERWEISE:

Wir teilen die Oktave in zwölf sogenannte HALBTONSCHRITTE (HTS) ein.

Mathematische Idee wäre:

Wir sorgen dafür, daß diese HTS alle das gleiche Intervall sind.

Also ein Faktor λ, so daß 12-mal λ nach oben gerade 2 ist, also

$$\boxed{\lambda^{12} = 2} \Longrightarrow \lambda = \sqrt[12]{2}$$

Erste Bem.: $\sqrt[12]{2}$ ist irrational.

Mit dieser Definition der HTS erhalten wir

	HTS	
C	0	$1.$
D	2	$\sqrt[6]{2}$
E	4	$\sqrt[3]{2}$
F	5	$\sqrt[12]{32}$
G	7	$\sqrt[12]{32}\cdot\sqrt[6]{2} = 2^{\frac{5}{12}}\cdot 2^{\frac{2}{12}} = 2^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{2^7}$
A	9	$\sqrt[12]{2^9} = 2^{\frac{9}{12}} = 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3}$
H	11	$\sqrt[12]{2^{11}} = 2^{\frac{11}{12}}$
C	12	$\sqrt[12]{2^{12}} = 2.$

Insbesondere sind alle irrational bis auf die Oktave.

<u>Lemma</u> Falls wir den HTS als Faktor $\sqrt[12]{2}$ definieren, so gibt es keine zwei Töne in der Tonleiter, welche das Intervall einer Quinte haben.

<u>Beweis</u> Zwei verschiedene Töne in der Tonleiter sind von der Form

$$\left(\sqrt[12]{2}\right)^k \cdot r \quad \text{und} \quad \left(\sqrt[12]{2}\right)^\ell \cdot r.$$

Also ist ihr Intervall

$$\frac{\left(\sqrt[12]{2}\right)^{k}}{\left(\sqrt[12]{2}\right)^{l}} = \left(\sqrt[12]{2}\right)^{k-l}$$

$$= 2^{\frac{k-l}{12}}.$$

$2^{k-l/12}$ ist
- entweder eine Zweierpotenz, falls $k-l/12 \in \mathbb{N}$
- oder irrational, falls $k-l/12 \notin \mathbb{N}$.

<u>FAZIT</u> Stimmen wir die HTS auf $\sqrt[12]{2}$ (Dies heißt die GLEICHSTUFIGE STIMMUNG.)

so taucht keines der harmonischen Intervalle bis auf die Oktaven in der Tonleiter auf.

Stattdessen

Die Idee der Pythagoräer war es, die Töne der Tonleiter so zu definieren, daß die Quinten notwendigerweise auftauchen.

Dies macht man, indem man die Töne über die Quinten (den Quintenzirkel) definiert.

Man identifiziert das Intervall, welches dem 7. Halbtonschritt entspricht mit der Quinte.

SOLFÈGE
SOLFEGGIO

		Halbtöne von der Grundtonstufe
DO	Grundtonstufe	0
RE		2
MI		4
FA		5
SOL		7
LA		9
TI		11

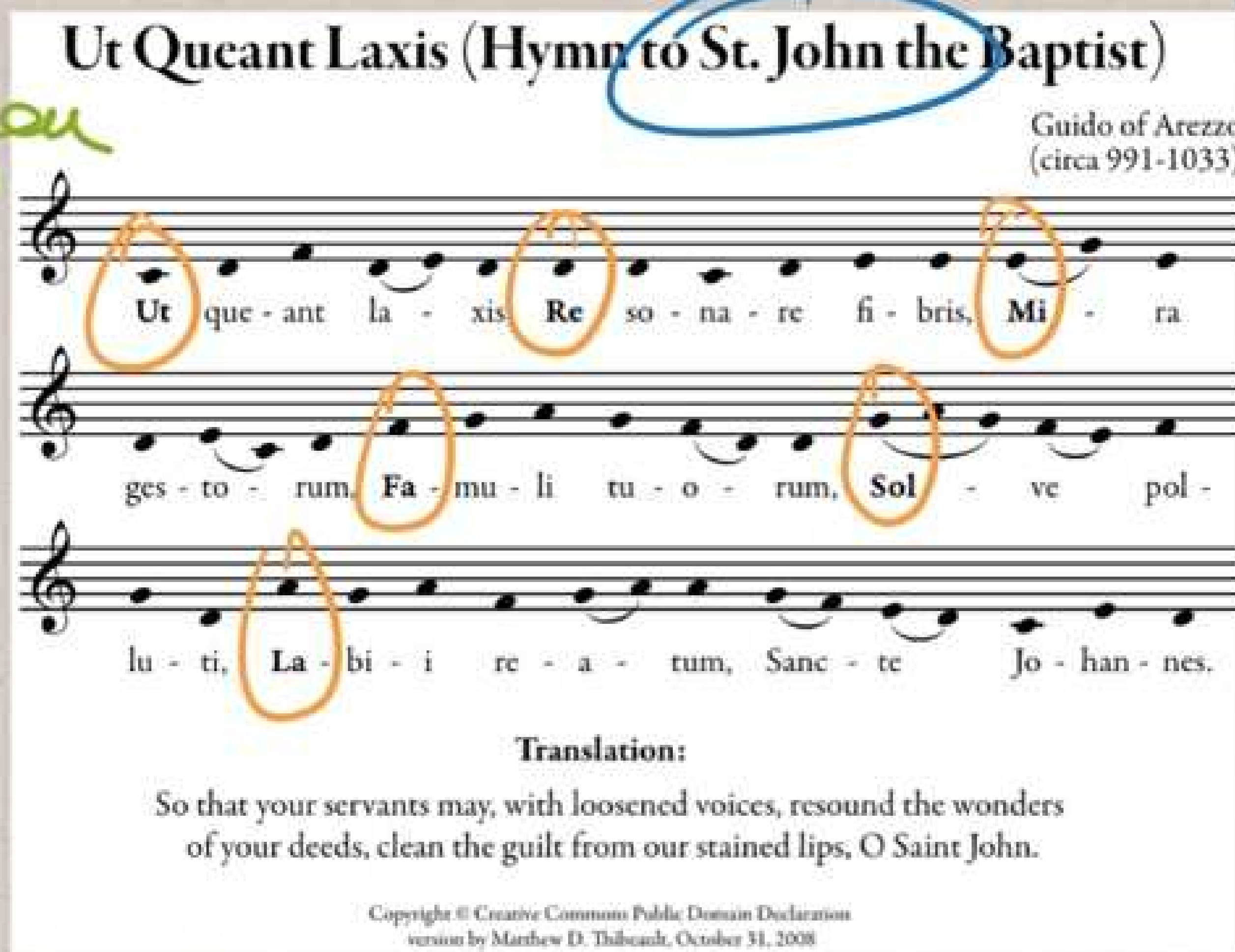
Im Pythagoreischen System
↓
QUINTE

Wenn wir von einer Tonstufenreihe eine Quinte hochgehen, was geschieht? $[x \longmapsto x+7]$

Bem.
Eine um eine Quinte verschobene Tonleiter erfordert einen neuen Ton: den um einen HTS nach oben verschobenen alten FA-Klang.

Neu	Halbtöne	Alt
DO	7	SOL
RE	$2+7=9$	LA
MI	$4+7=11$	TI
FA	$5+7=12\equiv 0\ (12)$	DO
SOL	$7+7=14\equiv 2\ (12)$	RE
LA	$9+7=16\equiv 4\ (12)$	MI
TI	$11+7=18\equiv 6\ (12)$	neuer Ton, der zwischen dem alten FA & dem alten SOL liegt.

Woher kommen die Bezeichnungen im SOLFEGGIO?



Zunächst im Mittelalter:

UT - RE - MI - FA - SOL - LA

- Aus Singgründen wurde UT in DO geändert.
- Es wurde eine siebte Tonstufe hinzugefügt, welche SI hieß. SI für SANCTUS IOANNES
- SI wurde dann auf TI geändert, damit alle Tonstufen unterschiedliche Anfangsbuchstaben haben.

Nun führen wir das pythagoräische Projekt durch und errechnen die Frequenzverhältnisse für alle Töne der Tonleiter über Quinten.

Mathematischer Hintergrund

In $\mathbb{Z}_{12}$ sind alle Zahlen mit $ggT(12, k) = 1$ additive Erzeuger.

Es ist $ggT(12, 7) = 1$, also erzeugt 7 die gesamte Gruppe.

$\Longrightarrow$ Nach 12 Schritten haben wir alle HTS definiert.

C D E F G A H C

2 HTS 2 HTS 1 HTS 2 HTS 2 HTS 2 HTS 1 HTS

Definition der Töne

(1) Durch eine Quinte nach oben gehen

Fange ich bei einem Ton Z an, so definiert die Quinte oberhalb von Z, also $\frac{3}{2}\nu$, mit ν Freq. von Z den folgenden Ton:

(a) Zähle vier Töne nach oben, um die Grundbezeichnung zu erhalten.

(b) Zähle die HTS. Falls dies 7 ergibt, so ist die Grundbezeichnung der richtige Ton. Ist es weniger als 7, so muß die Bezeichnung des Tons nach oben modifiziert werden.

Fis	Bei 6 HTS	$\longrightarrow$ #	(Kreuz)
Fisis	5 HTS	$\longrightarrow$ x	(Doppelkreuz)
Fisisis	4 HTS	$\longrightarrow$ x#	
	3 HTS	$\longrightarrow$ xx	

usw.

Bsp. 1 Wir fangen z.B. E an.

Schritt a) Vier Buchstaben nach oben

C D E $\overset{1}{}$ F $\overset{2}{}$ G $\overset{2}{}$ A $\overset{2}{}$ H C .

1 2 3 4

Dies liefert den Buchstaben H.

Schritt b) Überprüfung der HTS

⟶ 7, also ist H eine Quinte über E.

Bsp 2 Wir fangen bei H an.

Schritt a Vier Buchstaben nach oben

C $\overset{2}{}$ D $\overset{2}{}$ E $\overset{1}{}$ F G A H $\overset{1}{}$ C

2 3 4 1

Grundbuchstabe F

$1+2+2+1 = 6 < 7$

Also ist der Ton eine Quinte über H gerade F#.

(ausgesprochen "fis")

Falls der Ton, mit dem wir anfangen bereits erhöht ist, so wenden wir die Prozedur genauso an, aber wir berücksichtigen die Erhöhung bei der Berechnung der sieben HTS.

z.B. Angefangen bei F#

$$\mathrm{C}\quad \mathrm{D}\quad \mathrm{E}\quad \mathrm{F}\overset{2}{}\mathrm{G}\overset{2}{}\mathrm{A}\overset{2}{}\mathrm{H}\overset{1}{}\mathrm{C}$$

1 2 3 4

Ich erhalte Buchstaben C.

2+2+2+1 = 7
Aber, da ich von F# gestartet bin, muß ich einen HTS abziehen und erhalte 6.

D.h. eine Quinte höher als F# ist C# (ausgesprochen: "cis").

Nun wenden wir dies an:

$$C \underset{}{\,2\,} D \,2\, E \,1\, F \,2\, G \,2\, A \,2\, H \,1\, C$$

Sei die Grundfreq. von C gleich 1 gesetzt.
Also suchen wir nach Faktoren, die zwischen 1 und 2 liegen.

Fangen wir bei C an.

Eine Quinte hoch:
liefert uns G mit Faktor $\frac{3}{2}$.

Von G eine Quinte hoch:
liefert uns D mit Faktor $\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$

Da $\frac{9}{4} > 2$, müssen wir oktavieren, um wieder in untere Oktave zurückzukommen:

$$\frac{9}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{8}$$

[Man beachte: dies ist eine Sekunde höher als C.]