Mathematik & Musik
VORLESUNG VI
16. Mai 2022

Theorie der Fourierreihen

Bemerkung Um eine 2ℓ-periodische Funktion zu bekommen, müssen wir umparametrisieren:

$$F^{\ell}_{\vec{a},\vec{b}}(\vartheta) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi\vartheta}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi\vartheta}{\ell}\right)$$

FOURIERREIHE

VORLESUNG V
Seite 5

SATZ VON DIRICHLET

Ist f eine 2ℓ-periodische stetig differenzierbare Funktion, so existieren $\vec{a}, \vec{b}$, so daß für alle ϑ

$$f(\vartheta) = F^{\ell}_{\vec{a},\vec{b}}(\vartheta)$$

[Darstellung durch Fourierreihe]

MEHR NOCH!

Wir können diese Koeffizienten $\vec{a}$ und $\vec{b}$ konkret berechnen:

$$a_0 := \frac{1}{2\ell}\int_0^{2\ell} \cos\left(\frac{n\pi\vartheta}{\ell}\right) f(\vartheta)\,d\vartheta$$

$n \neq 0$ $$a_n := \frac{1}{\ell}\int_0^{2\ell} \cos\left(\frac{n\pi\vartheta}{\ell}\right) f(\vartheta)\,d\vartheta$$

$$b_n := \frac{1}{\ell}\int_0^{2\ell} \sin\left(\frac{n\pi\vartheta}{\ell}\right) f(\vartheta)\,d\vartheta$$

Fourierkoeffizienten

VORLESUNG V
Seite 6

Die Gleichungen war für Periode 2ℓ ausgedrückt. Wir drücken Schwingungen normalerweise in Abhängigkeit der Frequenz aus.

GERADE & UNGERADE

Falls f ungerade ist, so sind alle $a_n = 0$ und wir haben eine Sinusfourierreihe.

Falls die Wellenlänge 2ℓ ist, so ist die Frequenz

$$\nu = \frac{1}{2\ell}.$$

Parametrisieren wir um und erhalten

Falls f $\frac{1}{\nu}$-periodisch ist, dann erhalten wir mit Dirichlet

$\frac{m\pi\vartheta}{\ell}$ $\nu = \frac{1}{2\ell} \Leftrightarrow \ell = \frac{1}{2\nu}$

$$f(\vartheta) \doteq \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cdot \cos(2\pi\nu m\vartheta) + b_m \sin(2\pi\nu m\vartheta)$$

mit
$$b_m = \frac{1}{\ell}\int_0^{2\ell} \sin\left(\frac{m\pi\vartheta}{\ell}\right)\cdot f(\vartheta)\, d\vartheta$$
$$= 2\nu \int_0^{1/\nu} \sin(2\pi\nu m\vartheta) f(\vartheta)\, d\vartheta$$

[und ebenso für a_m].

Falls f eine $\frac{1}{\nu}$-periodische ungerade Fkt. ist mit Sinus-Fourierreihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m \sin(2\pi\nu m\vartheta),$$

so sind die b_m das Spektrum von f.

Die Funktionen in dieser Reihe heißen

$\sin(2\pi\nu m\vartheta)$ $\longrightarrow$ Grundton falls $m=1$ [1. Harmonische]

$\longrightarrow$ $(m-1)$te Oberton falls $m>1$ [m-te Harmonische]

Ein **Ton** ist eine einzelne solche Sinusschwingung $\sin(2\pi\nu\vartheta)$;

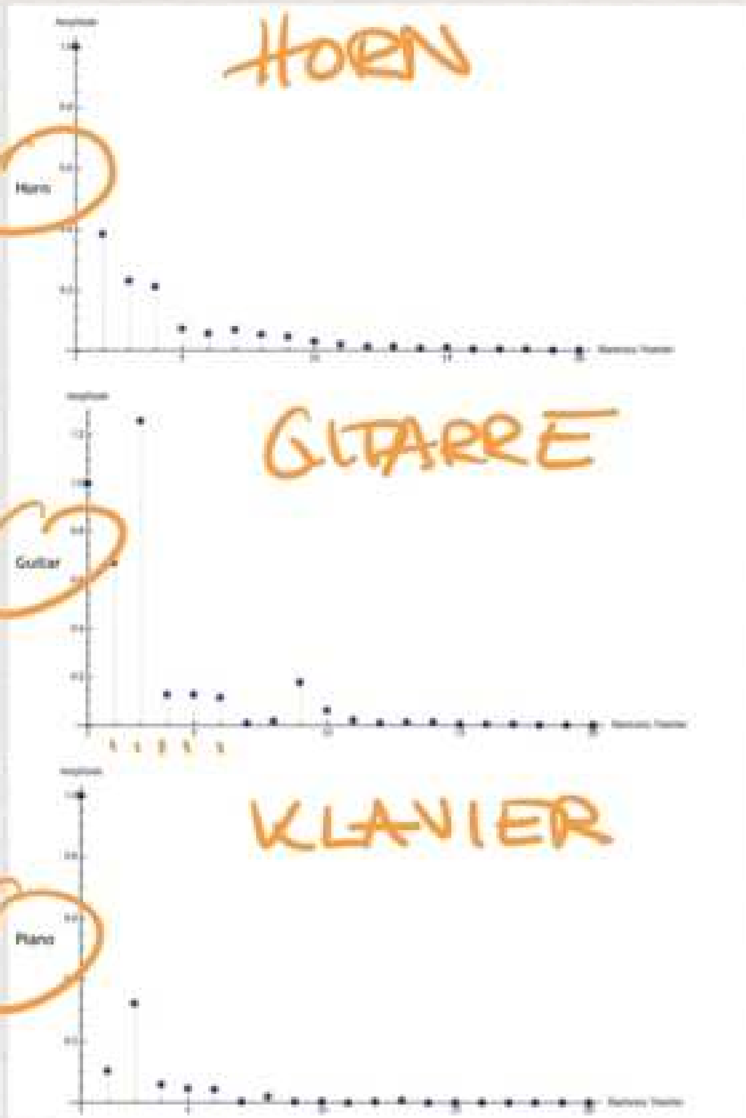
ein **Klang** mit **Frequenz ν** ist eine $\frac{1}{\nu}$-periodische Funktion mit Grundton $\sin(2\pi\nu\vartheta)$.

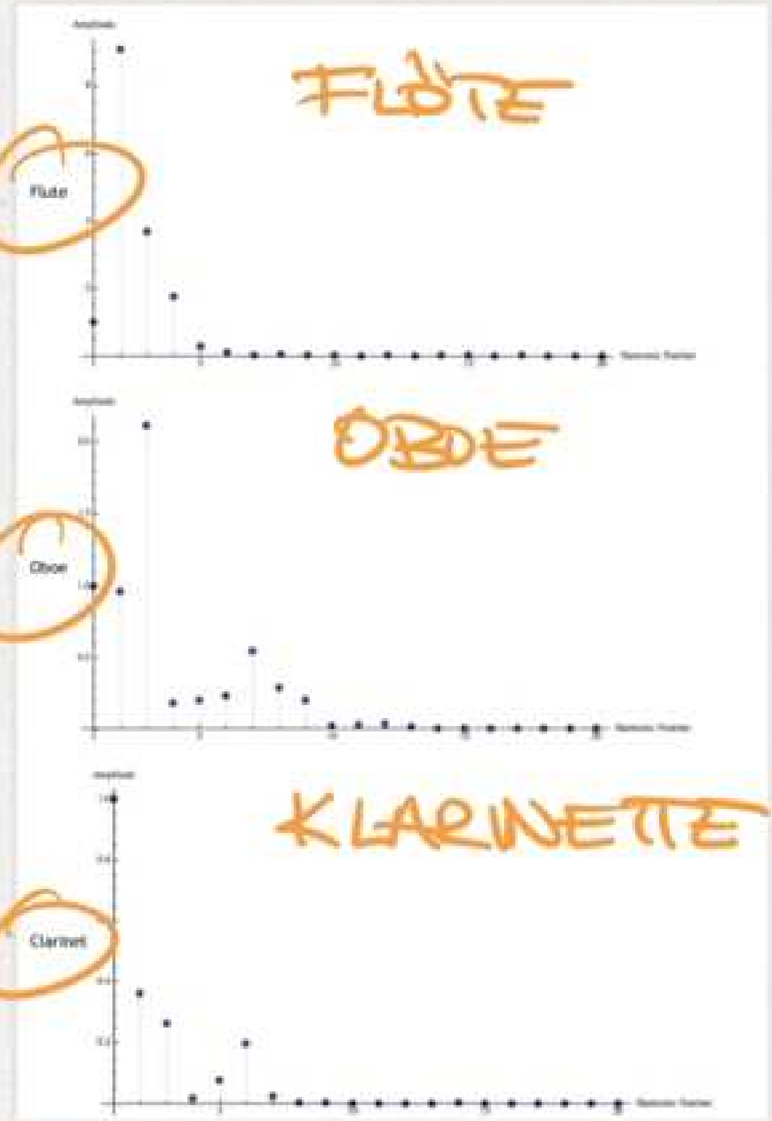
Hatten gesehen:

Ist $f(\vartheta) = \sum_{n=0}^{N} \lambda_n \cdot \sin(2\pi\nu n\vartheta)$,

so ist das Spektrum, welches wir mit der Formel im Satz von Dirichlet ausrechnen exakt

$$b_n = \lambda_n \quad \text{für } n \leq N$$
$$b_n = 0 \quad \text{für } n > N.$$





Wir erinnern uns (Vorlesung I):

Unterschiedliche Instrumente produzieren unterschiedliche Klänge bei gleichem Grundton. Wir hören nicht nur den Grundton, sondern das gesamte Spektrum. Das erlaubt es uns, zwischen identischen (Grund-)tönen, die von verschiedenen Instrumenten gespielt werden zu unterscheiden.

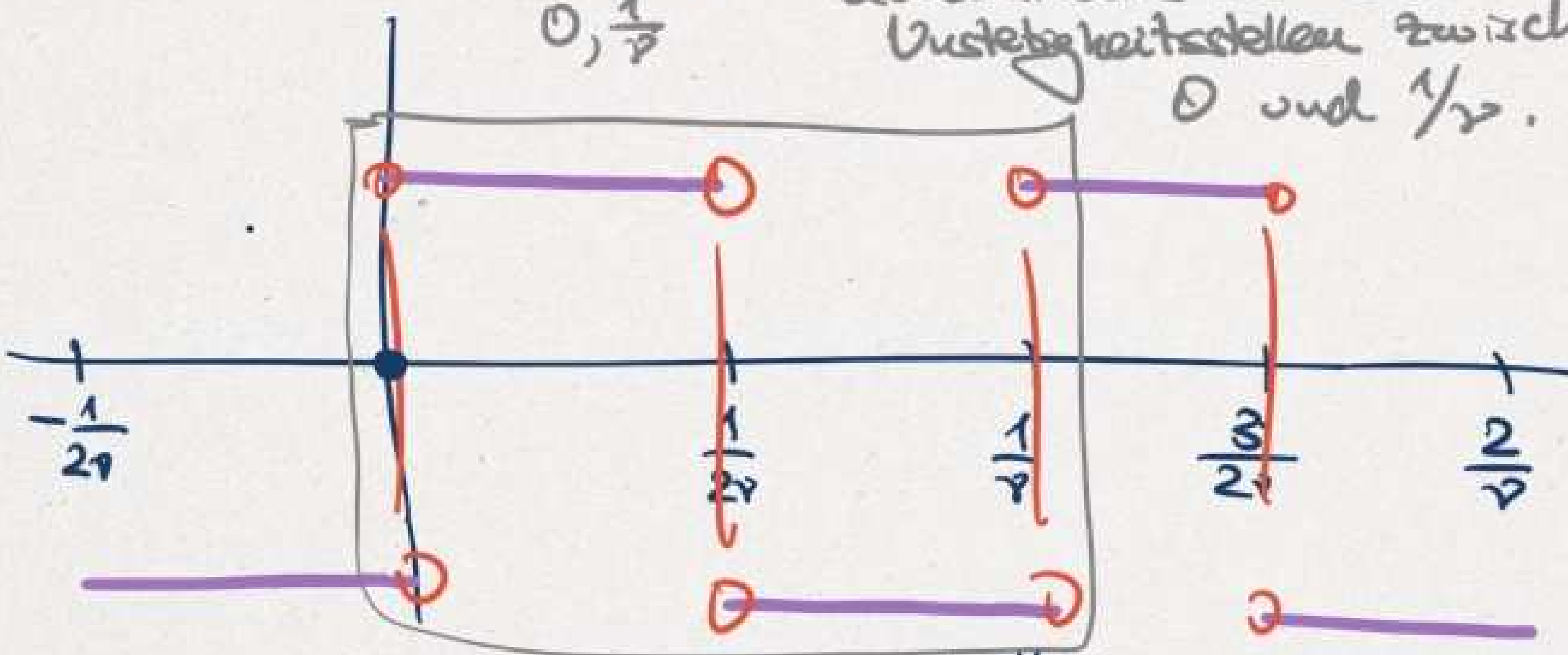
Die Funktion f, die am besten den Klang einer KLARINETTE wiedergibt, ist die QUADRATWELLE s:

$$s(\vartheta) := \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \leq \vartheta < \frac{1}{2\nu} \\ -1 & \text{falls } \frac{1}{2\nu} \leq \vartheta < \frac{1}{\nu} \end{cases}.$$

und dann $\frac{1}{\nu}$ - periodisch fortgesetzt.

$0, \frac{1}{\nu}$

Quadratwelle hat drei Unstetigkeitsstellen zwischen 0 und $1/\nu$.



ACHTUNG: Die Quadratwelle ist nicht stetig differenzierbar. Sie ist nicht einmal stetig.

Rot markiert: Unstetigkeitsstellen

VERSTÄRKUNG DES SATZES VON DIRICHLET:

Ist f eine $\frac{1}{\nu}$-periodische, die
STÜCKWEISE STETIG DIFFERENZIERBAR zw. 0 und $1/\nu$
(d.h. es gibt endlich viele Ausnahmepunkte und auf dem Rest der Funktion zwischen 0 und $1/\nu$ ist die Fkt. stetig diff'bar)
ist, so gibt mit den im Satz von Dirichlet angegebenen Koeffizienten a_m und b_m, daß

$$f(\vartheta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos(2\pi\nu m\vartheta) + b_m \cdot \sin(2\pi\nu m\vartheta)$$

an allen Stellen ϑ gilt, die keine Ausnahmepunkte von f sind.

Wir können also die Verstärkung des Satzes von Dirichlet auf die Quadratwelle anwenden und die Koeffizienten a_m und b_m berechnen.

Wir stellen fest: s ist eine ungerade Fkt.
$\Longrightarrow a_m = 0$ f.a. m

Berechnen wir nun b_m:

$$b_m = 2\nu \int_0^{1/\nu} \sin(2\pi\nu m\vartheta)\cdot s(\vartheta)\,d\vartheta$$

$$= 2\nu\left(\int_0^{1/2\nu} \sin(2\pi\nu m\vartheta)\underbrace{s(\vartheta)}_{\substack{= +1 \text{ auf} \\ (0,\,1/2\nu)}}\,d\vartheta + \int_{1/2\nu}^{1/\nu}\sin(2\pi\nu m\vartheta)\underbrace{s(\vartheta)}_{\substack{-1 \text{ auf} \\ (1/2\nu,\,1/\nu)}}\,d\vartheta\right)$$

$$= 2\nu\left(\int_0^{1/2\nu}\sin(2\pi\nu m\vartheta)\,d\vartheta - \int_{1/2\nu}^{1/\nu}\sin(2\pi\nu m\vartheta)\,d\vartheta\right)$$

$$= 2\nu\left(\left[-\frac{1}{2\pi\nu m}\cos(2\pi m\nu\vartheta)\right]_0^{1/2\nu} - \left[-\frac{1}{2\pi\nu m}\cos(2\pi m\nu\vartheta)\right]_{1/2\nu}^{1/\nu}\right)$$

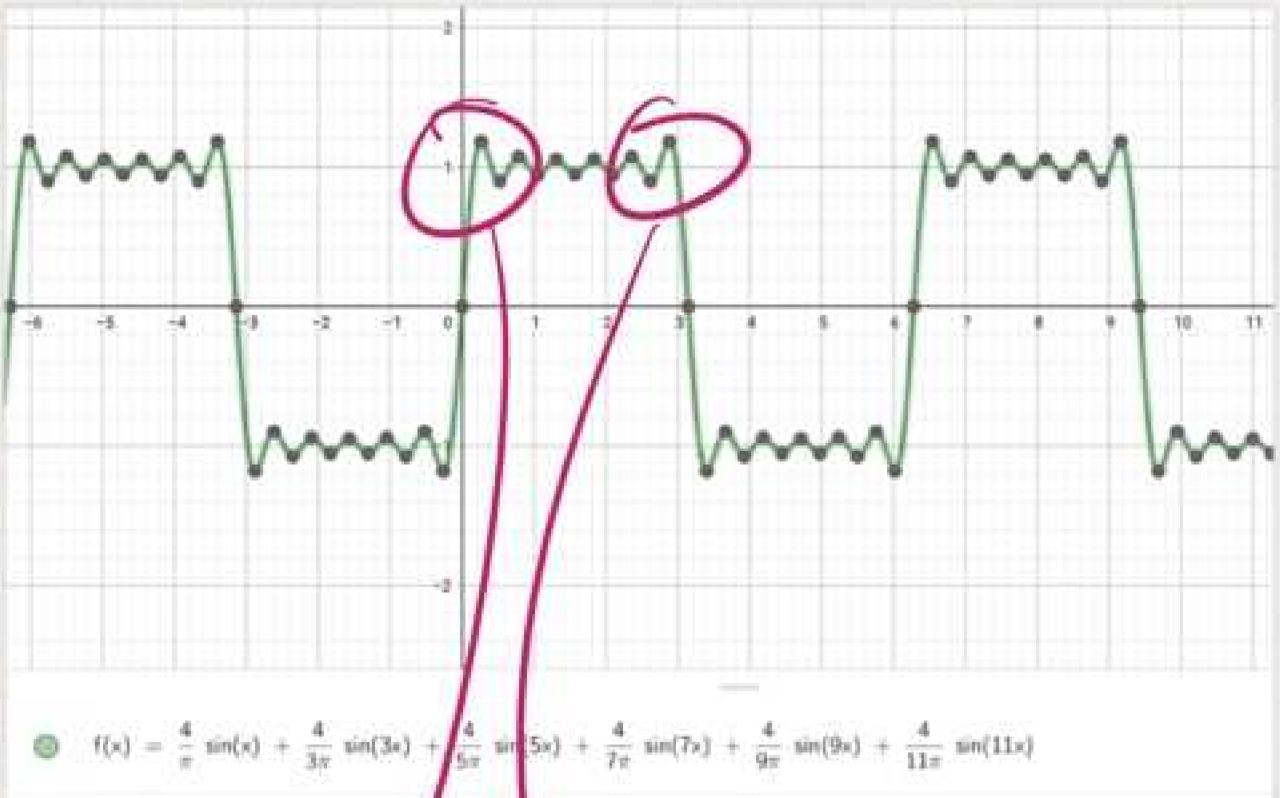
$$= 2\nu\left(\left(\frac{\cos(\pi\cdot m)}{-2\pi\nu m} - \frac{1}{-2\pi\nu m}\right) - \left(\frac{\overset{=1}{\cos(2\pi m)}}{-2\pi\nu m} - \frac{\cos(\pi m)}{-2\pi\nu m}\right)\right)$$

$$= \frac{\cancel{2}\cancel{\nu}}{-\cancel{2}\pi\cancel{\nu}m}\left(2\cos(\pi m) - 2\right)$$

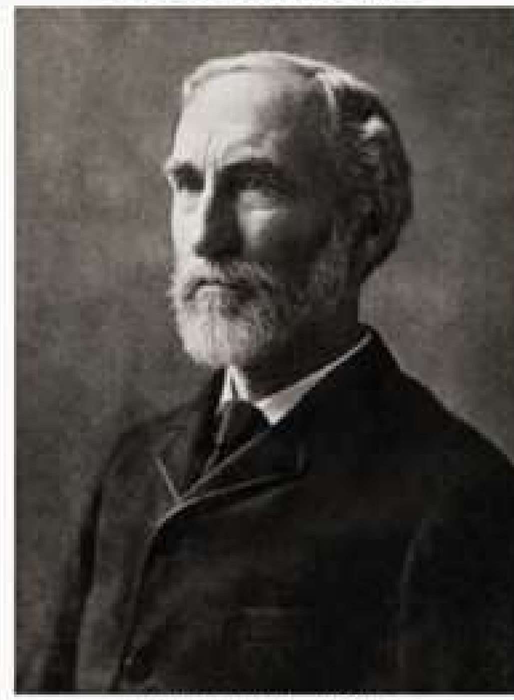
$$= \frac{2}{\pi m}\left(1 - \cos(\pi m)\right) = \begin{cases} 0 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ \frac{4}{\pi m} & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$$

Also erhalten wir das Spektrum

$$b_0 = 0$$
$$b_1 = 4/\pi$$
$$b_2 = 0$$
$$b_3 = 4/3\pi$$
$$b_4 = 0$$
$$b_5 = 4/5\pi$$
$$b_6 = 0$$
$$b_{2n+1} = 4/(2n+1)\pi$$



Josiah Willard Gibbs



Josiah Willard Gibbs

Born	February 11, 1839 New Haven, Connecticut, U.S.
Died	April 28, 1903 (aged 64) New Haven, Connecticut, U.S.
Nationality	American

Der Ausreißer an den Unstetigkeitsstellen ist kein Zufall.
Man nennt dies das <u>GIBBS-Phänomen</u>.

Approximiert man eine nichtstetige Funktion durch endliche Approximationen einer Fourierreihe, so konvergiert diese Reihe an den Unstetigkeitsstellen nicht gleichmäßig, sondern nur ungleichmäßig. Die Ausreißer oder Überschwingungen betragen ca. 8,9 % der Höhe der Unstetigkeit.

Dies erlaubt es uns z.B. einen digital generierten oder gesampelten Klang (der, wegen der digitalen Natur der Speicherung, nur eine endliche Approximation sein kann) von einem echten analogen Klang zu unterscheiden.

KONSONANZ

In der Natur hören wir KLÄNGE nicht TÖNE (d.h. inclusive der Obertöne).

Ist also f ein Klang mit Grundfrequenz ν und g ein Klang mit Grundfrequenz 2ν ["die Oktave von f"], dann hat f die Obertöne

Bsp 1

$$\sin(2\pi n\nu\vartheta)$$

und g die Obertöne

$$\sin(2\pi n(2\nu)\vartheta) = \sin(4\pi n\nu\vartheta),$$

also ist jeder Oberton von g auch ein Oberton von f!

D.h. der Klang g ist (auf gewisse Weise) im Klang f enthalten.

[Vgl. man empfindet die Oktave als gleichen Ton]

Bsp 2 Sei g Klang mit Fr. 2ν und h Klang mit Fr. 3ν.

[Dies bezeichnet man als <u>reine Quinte</u>]

Dann sind die Obertöne von g gerade

$$\sin(4\pi n \nu t)$$

und die Obertöne von h sind

$$\sin(6\pi n \nu t).$$

Das heißt: jeder zweite Oberton von h ist ein Oberton von g; jeder dritte Oberton von g ist ein Oberton von h.

Dies ist immer noch eine "recht große" Übereinstimmung.

Ebenso (Bsp 3):

Falls h Fr. 3ν

k Fr. 4ν,

so ist jeder dritte Oberton von k auch einer von h und jeder vierte von h auch einer von k.

ZUSAMMENFASSEND

Falls zwei Klänge Grundfrequenzen $a\nu$ und $b\nu$ haben und $\frac{a}{b}$ ist ein Bruch, so ist die Übereinstimmung der Obertöne umso größer, desto kleiner die vollständig gekürzten Zahlen im Zähler und Nenner von a/b sind.

In der Praxis wichtig: Da die Folge der Fourierkoeffizienten eine Nullfolge sein muß (wegen Konvergenz) spielen beim physikalischen Hören nur einige Obertöne mit kleinem Index eine Rolle.

Also: Kleine ganzzahlige Brüche erzeugen
KONSONANZ.

Vgl.
VORLESUNG I:

Pythagoräische Harmonie
Um so kleiner die Zahlen im Bruch, desto wohlklingender der Klang.

→ Die Theorie der Obertöne erklärt den (ursprünglich mystischen) Glauben der Pythagoräer.

Lemma: Falls $\alpha \in \mathbb{R}$ und die Funktion
$$\sin x + \sin(\alpha x) \text{ ist}$$
periodisch, so ist α rational.

KOROLLAR: Also ist $f(x) = \sin(x) + \sin(\sqrt{2}x)$ in unserer Terminologie nicht einmal ein Klang.

Beweis des Lemmas: Widerspruchsbeweis: wir nehmen an, α ist irrational.

Angenommen, $f(x) = \sin x + \sin \alpha x$ ist periodisch mit Periode P.

:

Also $f(x) = f(x+P)$ für alle x

$\sin x + \sin \alpha x = \sin(x+P) + \sin(\alpha x + \alpha P)$

$\Longleftrightarrow \sin x - \sin(x+P) = -\sin(\alpha x) + \sin(\alpha x + \alpha P)$

$\Longleftrightarrow 2\cos\left(x+\frac{P}{2}\right)\cdot \sin\left(\frac{P}{2}\right) = -2\cos\left(\alpha x + \frac{\alpha}{2}P\right)\cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}P\right)$

[Parametrisiere um $y := x + \frac{P}{2}$]

$\Longleftrightarrow 2\cos(y)\cdot \sin\left(\frac{P}{2}\right) = -2\cos(\alpha y)\cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}P\right)$

für alle y.

① Setze ein $y = \frac{\pi}{2}$. Dann ist die linke Seite Null, da $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Da α irrational ist, ist $\cos(\alpha y) \neq 0$, also ist $\sin\left(\frac{\alpha}{2}P\right) = 0$.

Also ist αP ein Vielfaches von 2π.

ADDITIONSTHEOREM

$\sin a - \sin b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

② Setzen ein: $y = \frac{\pi}{2\alpha}$.

Dann ist $\cos(\alpha y) = \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2\alpha}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Also ist die rechte Seite Null.

Dann ist nun $\cos\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right) \neq 0$, da α irrational.

Also ist $\sin\left(\frac{P}{2}\right) = 0$.

Somit ist P ein Vielfaches von 2π.

Aus den beiden rot markierten Aussagen erhalten wir einen Widerspruch:

$$(1) \Rightarrow \alpha P = k \cdot 2\pi$$
$$(2) \Rightarrow P = l \cdot 2\pi$$

$$\alpha = \frac{\alpha P}{P} = \frac{k 2\pi}{l 2\pi} = \frac{k}{l} \in \mathbb{Q}.$$

Widerspruch!

q.e.d.

Somit ist ein Intervall $\nu / \sqrt{2}\nu$ keine periodische Funktion und somit kein Klang.

Wir haben für Konsonanz von Klängen argumentiert!

Aber unsere Sinusschwingungen (= Töne) haben ja gar keine Obertöne.

Woher kommt also die Konsonanz.

→

PSYCHOAKUSTIK
oder
MUSIKKOGNITION

Eine mögliche Antwort ist

HÖRERWARTUNG

Wir erwarten die Obertöne aus dem Klang und das Gehirn vervollständigt den Klang.

$\sin \nu x$ $\quad$ $\sin \nu' x$

(1) Abstand sehr gering:

$\nu' = \nu + \varepsilon$

→ SCHWEBUNGEN

(2) Ab Abstand von ca. 30-40 Hertz entsteht RAUHIGKEIT, die wir als Dissonanz empfinden.

(3) Sehr große Abstände liegen dann in der Nähe von Obertönen

→ KONSONANZ.

Hermann von Helmholtz

Born	Hermann Ludwig Ferdinand Helmholtz 31 August 1821 Potsdam, Province of Brandenburg, Kingdom of Prussia, German Confederation
Died	8 September 1894 (aged 73) Charlottenburg, Province of Brandenburg, Kingdom of Prussia, German Empire

DIE LEHRE

VON DEN

TONEMPFINDUNGEN

ALS

PHYSIOLOGISCHE GRUNDLAGE

FÜR DIE

THEORIE DER MUSIK.

VON

H. HELMHOLTZ.

Professor der Physiologie an der Universität zu Heidelberg.

MIT IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSTICHEN.

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1863.