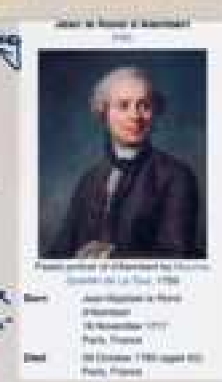
MATHEMATIK & MUSIK

Fünfte Vorlesung

9. Mai 2022

Aus Vorlesung IV: →



Die Lösung der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

wird durch den SATZ VON D'ALEMBERT wie folgt charakterisiert:

[Der d'Alembertsche Trick benutzt das Faktorisieren des sogenannten Differentialoperators $\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]$ und damit wird die Funktion φ aufgespalten.]

Falls φ eine Lösung der Wellengleichung ist, so existieren geeignete Funktionen f und g, so daß

$$\boxed{\varphi(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct).}$$

OHNE BEWEIS.

D'ALEMBERT (1) $\varphi(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$

EINSPANNUNG DER SAITE (2) $\varphi(0,t) = 0 = \varphi(\ell,t)$ für alle t

Setze (2) in (1) ein:

$$0 = \varphi(0,t) = f(0+ct) + g(0-ct) = f(ct) + g(-ct) \quad \text{für alle } t$$

Mit anderen Worten:

(3) $f(t) = -g(-t)$ für alle t.

Also verwende (3) um in (1) g loszuwerden:

$$\boxed{\varphi(x,t) = f(x+ct) - f(ct-x)} \quad (4)$$

Nun verwende $\varphi(\ell,t) = 0$ für alle t

$$0 = \varphi(\ell,t) = f(\ell+ct) - f(-\ell+ct)$$

$$\Longrightarrow f(\ell+ct) = f(-\ell+ct) \quad \text{für alle } t$$

Also gilt für jedes s:

$$\boxed{f(s) = f(s+2\ell)}$$

Also ist f eine periodische Funktion mit Periode 2ℓ.

SATZ VON D'ALEMBERT

Lösungen der Wellengleichung mit Randbedingungen $\varphi(0,t) = \varphi(\ell,t) = 0$ f.a. t sind von der Form

$$\boxed{\varphi(x,t) = f(x+ct) - f(ct-x)}$$

für eine 2ℓ-periodische Funktion f.

Die BERNOULLI-Lösung $\boxed{f(\xi) = \cos\left(\frac{\pi \xi}{\ell}\right)}$ induziert eine Lösung der Wellengleichung

$$\boxed{\varphi(x,t) = \cos\left(\frac{\pi x + \pi c t}{\ell}\right) - \cos\left(\frac{\pi c t - \pi x}{\ell}\right)}$$

$$= 2 \sin\left(\frac{\pi c t}{\ell}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right).$$

D.h. die Bernoulli-Lösung induziert eine Sinusschwingung mit Frequenz

$$\frac{c}{2l}.$$

MERSENNESCHE FORMEL

$$\boxed{\nu = \frac{1}{2l} \cdot c = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\lambda_m}}}$$

Theorie der Fourierreihen

Theorie der Fourierreihen liefert eine allgemeine Analyse aller periodischen Funktionen und somit (nach dem Satz von d'Alembert) aller Lösungen der Wellengleichung.

Definition Seien $\vec{a} = (a_m ; m \geq 0)$ und $\vec{b} = (b_m ; m \geq 0)$ Folgen reeller Zahlen und ϑ eine reelle Zahl.

$$F_{\vec{a},\vec{b}}(\vartheta) := \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cdot \cos(m\vartheta) + b_m \sin(m\vartheta).$$

KONVERGENZ?

$$F_{\vec{a},\vec{b}}(\vartheta) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \underline{\cos(n\vartheta)} + b_n \cdot \underline{\sin(n\vartheta)}$$

2π-periodisch

Beispiel für Nichtkonvergenz:

Falls $\vartheta = 0$, so ist $\cos(n\vartheta) = 1$
$\sin(n\vartheta) = 0$

Wähle z.B. $a_n = 1$ für alle n

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\vartheta) + b_n \cdot \sin(n\vartheta)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty .$$

Beispiel für Konvergenz:

Falls nur endlich viele $a_n, b_n \neq 0$ sind, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\vartheta) + b_n \sin(n\vartheta)$

einfach eine endliche Summe und somit konvergent.

z.B. $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und
$b_1 = 1$, $b_0 = 0$, $b_n = 0 \; \forall n \geq 2$

$$F_{\vec{a},\vec{b}}(\vartheta) = 1 \cdot \sin(1 \cdot \vartheta) = \sin(\vartheta).$$

Def. Konvergiert dieser Ausdruck für jedes ϑ, so sagen wir

Die Reihe mit Koeff. $\vec{a}, \vec{b}$ konvergiert.

Dies nennt man Fourierreihe und die Koeffizienten $\vec{a}, \vec{b}$ heißen Fourierkoeffizienten.

Dann ist $\vartheta \longmapsto F_{\vec{a},\vec{b}}(\vartheta)$ eine (wohldefinierte) Funktion.

EIGENSCHAFTEN.

(1) Für jedes m sind $\cos(m\vartheta)$ und $\sin(m\vartheta)$ 2π-periodisch.

(2) Falls f, g 2π-periodisch sind, so auch $\lambda f + \mu g$.

$$\Big[(\lambda f + \mu g)(\vartheta + 2\pi) = \lambda \cdot f(\vartheta + 2\pi) + \mu \cdot g(\vartheta + 2\pi)$$

$$\overset{\text{da } f,g\ 2\pi\text{-periodisch}}{=} \lambda \cdot f(\vartheta) + \mu \cdot g(\vartheta)$$

$$= (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(\vartheta). \Big]$$

③ Also ist in der Fourierreihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \cdot \cos(m\vartheta) + b_m \cdot \sin(m\vartheta)$$

jeder einzelne Summand 2π-periodisch.

④ Daraus folgt: $F_{\vec{a},\vec{b}}$ ist 2π-periodisch

[Schreiben wir $f_m(\vartheta) := a_m \cdot \cos(m\vartheta) + b_m \cdot \sin(m\vartheta)$.

Also sagt ③, daß f_m 2π-periodisch ist.

$$F_{\vec{a},\vec{b}}(\vartheta + 2\pi) := \sum_{m=0}^{\infty} f_m(\vartheta + 2\pi)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} f_m(\vartheta)$$

Hier geht ein, daß f_m 2π-periodisch ist.

$$= F_{\vec{a},\vec{b}}(\vartheta) .\ ]$$

Bemerkung Um eine 2ℓ-periodische Funktion zu bekommen, müssen wir umparametrisieren:

$$\boxed{F^{\ell}_{\vec{a},\vec{b}}(\vartheta) := \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi\vartheta}{\ell}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi\vartheta}{\ell}\right).}$$

SATZ VON DIRICHLET

Ist f eine $2l$-periodische stetig differentierbare Funktion, so existieren $\vec{a}, \vec{b}$, so daß für alle ϑ

$$f(\vartheta) = F^{l}_{\vec{a},\vec{b}}(\vartheta)$$

[Darstellung durch Fourierreihe]

MEHR NOCH:

Wir können diese Koeffizienten $\vec{a}$ und $\vec{b}$ konkret berechnen:

$$a_0 := \frac{1}{2l} \int_0^{2l} \cos\left(\frac{n\pi\vartheta}{l}\right) f(\vartheta)\, d\vartheta$$

$n \neq 0$ $$a_n := \frac{1}{l} \int_0^{2l} \cos\left(\frac{n\pi\vartheta}{l}\right) f(\vartheta)\, d\vartheta$$

$$b_n := \frac{1}{l} \int_0^{2l} \sin\left(\frac{n\pi\vartheta}{l}\right) f(\vartheta)\, d\vartheta$$

Peter Gustav Lejeune Dirichlet

Peter Gustav Lejeune Dirichlet

Born	Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet 13 February 1805 Düren, French Empire
Died	5 May 1859 (aged 54) Göttingen, Kingdom of Hanover
Nationality	German

Bemerkung a_0 hat eine Sonderform (Faktor $\frac{1}{2}$)

b_0 braucht keine Sonderform, weil

$b_0 = 0$ [da $\sin(0) = 0$].

Der Satz von Dirichlet sagt: jede 2ℓ-periodische Funktion kann durch Linearkombinationen von Sinus und Kosinus approximiert werden.

ganzzahlige Vielfache eines Grund-Sinus und Grund-Kosinus

Definition Eine Funktion f heißt gerade falls für alle ϑ gilt:

$$f(\vartheta) = f(-\vartheta).$$

[M.a.W.: f ist spiegelsymmetrisch an der y-Achse.]

Bsp. KOSINUS.

Eine Funktion f heißt ungerade falls für alle ϑ gilt:

$$f(\vartheta) = -f(-\vartheta)$$

[M.a.W.: Rotationssymmetrisch für 180° Rotation am Ursprung].

Bsp. SINUS.

EIGENSCHAFTEN

(1) f_1, f_2 ungerade, g_1, g_2 gerade

$\Longrightarrow$ $f_1 \cdot f_2$ ist gerade (a)

$f_1 \cdot g_1$ ist ungerade (b)

$g_1 \cdot g_2$ ist gerade (c)

[(a) $(f_1 \cdot f_2)(-\vartheta) = f_1(-\vartheta) \cdot f_2(-\vartheta)$

$= -f_1(\vartheta)\left(-f_2(\vartheta)\right)$

Da f_1, f_2 ungerade sind.

$= f_1(\vartheta) \cdot f_2(\vartheta)$

$= (f_1 \cdot f_2)(\vartheta)$;

(b) $(f_1 \cdot g_1)(-\vartheta) = f_1(-\vartheta) \cdot g_1(-\vartheta)$

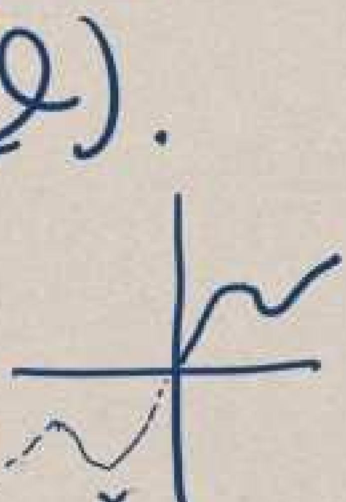
$= -f_1(\vartheta) \cdot g_1(\vartheta)$

Da f_1 ungerade und g_1 gerade

$= -(f_1 \cdot g_1)(\vartheta)$.

(c) ist genauso.]

(2) Falls f ungerade ist, so gilt



$$\int_{-x}^{x} f(\vartheta)\,d\vartheta = \int_{-x}^{0} f(\vartheta)\,d\vartheta + \int_{0}^{x} f(\vartheta)\,d\vartheta = \int_{0}^{-x} -f(\vartheta)\,d\vartheta + \int_{0}^{x} f(\vartheta)\,d\vartheta$$

$$= 0.$$

Zurück zu unseren Fourierreihen:

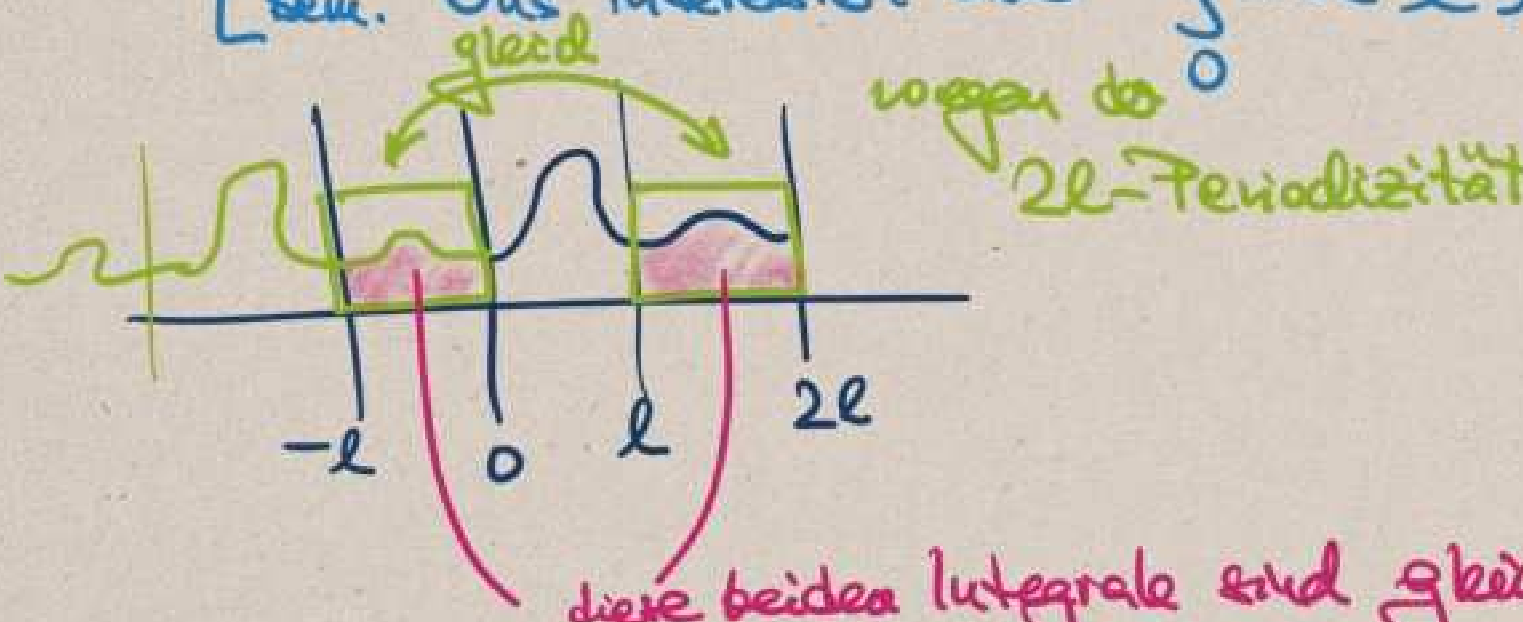
Falls f gerade ist, so ist

$$\vartheta \longmapsto \sin\left(\frac{n\pi\vartheta}{\ell}\right)\cdot f(\vartheta)$$

eine ungerade Funktion nach Eigenschaft ① (b)
und somit nach Eigenschaft ②

$$\int_{-\ell}^{\ell} \sin\left(\frac{n\pi\vartheta}{\ell}\right) f(\vartheta)\,d\vartheta = 0.$$

[Bem. Uns interessiert aber $\int_0^{2\ell} \sin\left(\frac{n\pi\vartheta}{\ell}\right) f(\vartheta)\,d\vartheta = b_n\cdot\pi$]



<u>Zusammenfassend</u> Falls eine Funktion h 2ℓ-periodisch ist, so gilt

$$\int_0^{2\ell} h(\vartheta)\,d\vartheta = \int_x^{2\ell+x} h(\vartheta)\,d\vartheta.$$

Somit $$\int_0^{2\ell} \sin\left(\frac{n\pi\vartheta}{\ell}\right) f(\vartheta)\,d\vartheta = \int_{-\ell}^{\ell} \sin\left(\frac{n\pi\vartheta}{\ell}\right) f(\vartheta)\,d\vartheta = 0.$$

Also: Falls f gerade ist, so sind alle $b_m = 0$.

D.h. $$f(\vartheta) = F^{\ell}_{\vec{a},\vec{b}}(\vartheta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cdot \cos\left(\frac{m\pi\vartheta}{\ell}\right)$$

Dies nennt man eine KOSINUSFOURIERREIHE: eine, in der nur die Kosinusterme auftauchen.

Ebenso rechnen wir nach:

Falls f ungerade ist, so ist
$$\vartheta \longmapsto \cos\left(\frac{m\pi\vartheta}{\ell}\right) \cdot f(\vartheta)$$
ungerade und somit
$$\int_0^{2\ell} \cos\left(\frac{m\pi\vartheta}{\ell}\right) \cdot f(\vartheta)\, d\vartheta = 0,$$
also sind alle $a_m = 0$; d.h.
$$f(\vartheta) = F^{\ell}_{\vec{a},\vec{b}}(\vartheta) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \cdot \sin\left(\frac{m\pi\vartheta}{\ell}\right)$$

SINUSFOURIER-REIHE

Zusammenfassend

Jede gerade $2l$-periodische Funktion hat eine Kosinusfourierreihe; jede ungerade $2l$-periodische Funktion hat eine Sinusfourierreihe.

D.h. der Satz von d'Alembert und der Satz von Dirichlet zusammen implizieren:

JEDE LÖSUNG DER WELLENGLEICHUNG KANN DURCH LINEARKOMBINATION VON GANZZAHLIGEN VIELFACHEN EINER GRUNDSCHWINGUNGEN APPROXIMIERT WERDEN.

Die Fourierkoeffizienten $\vec{a}, \vec{b}$ entsprechen dem Gewicht mit dem diese Einzelschwingungen im Klang vertreten sind.

Wir nennen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ das FOURIERSPEKTRUM (KLANGSPEKTRUM, SPEKTRUM) des Klangs.

Falls f eine ungerade Funktion ist
und $$f(\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi\vartheta}{\ell}\right)$$
(d.h. $\vec{b}$ ist das Spektrum von f), dann
nennen wir die Funktion
$$\vartheta \longmapsto \sin\left(\frac{n\pi\vartheta}{\ell}\right)$$
die <u>n-te Harmonische von</u> f.

Die 0-te Harmonische ist die konstante Funktion mit Wert 0.

Die 1ste Harmonische nennt man auch den <u>GRUNDTON</u>.

Die n+1ste Harmonische nennt man auch den <u>n-ten OBERTON</u>.

Ein <u>Klang</u> besteht aus einem Grundton und Gewichten (=Fourierkoeffizienten) für die Obertöne.

Die einfachsten Fourierspektren.

(1) z.B. $b_0 = 0$; $b_1 = 1$; $b_n = 0 \ \forall n \geq 2$

$$f(\vartheta) = F^{\ell}_{\bar{a},\bar{b}}(\vartheta) = 1 \cdot \sin\left(\frac{1 \cdot \pi \cdot \vartheta}{\ell}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi \vartheta}{\ell}\right).$$

Die reine Sinusschwingung hat ein Spektrum, in dem lediglich der Grundton Gewicht 1 bekommt.

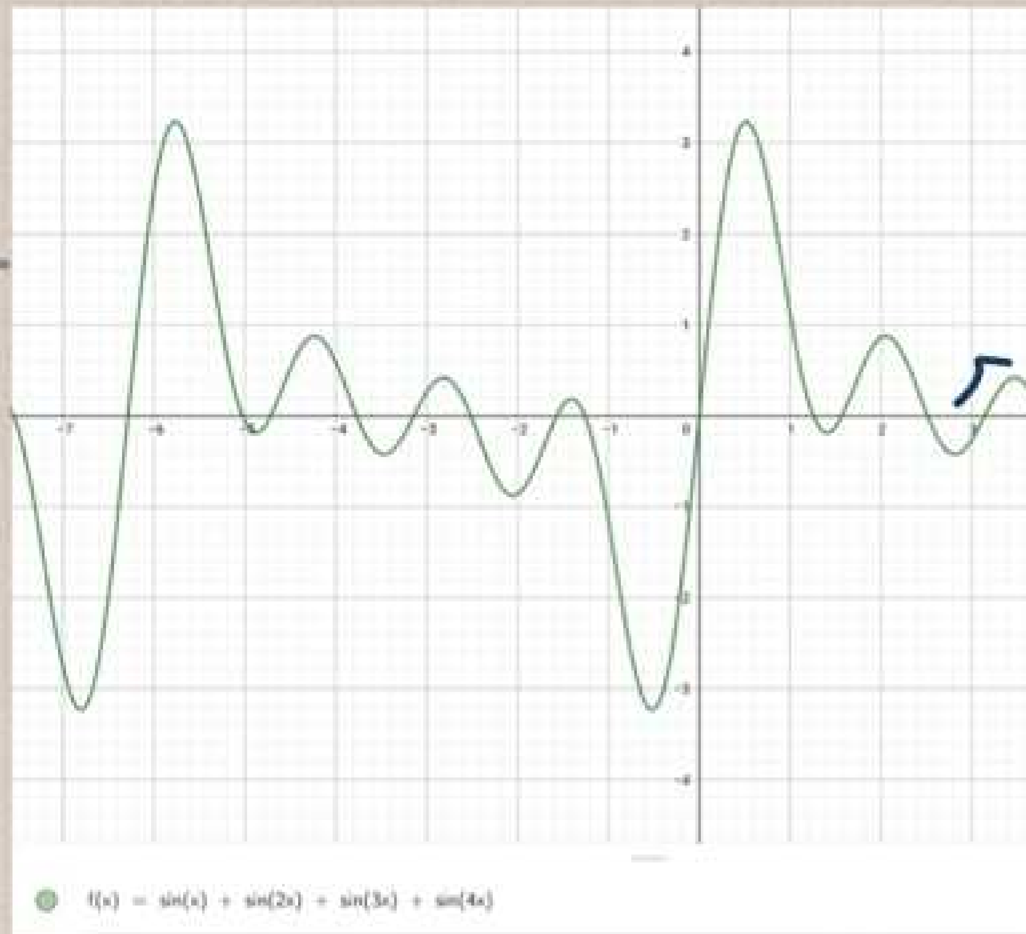
(2) z.B. $b_0 = 0$; $b_1 = b_2 = 1$; $b_n = 0 \ \forall n \geq 3$

$$f(\vartheta) = \sin\left(\frac{\pi \vartheta}{\ell}\right) + \sin\left(\frac{2\pi\vartheta}{\ell}\right)$$

Dies sind die Funktionen, die wir in den ersten Vorlesungen als Beispiele von Klängen kennengelernt hatten.

Erinnerung an Vorlesung I:

Wir hatten uns gefragt, ob eine Summe von Sinusfunktionen uns erlaubt, die ursprünglichen Komponenten zu berechnen.



$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$

Konkrete mathematische Frage.

Eine Funktion
$$\sum_{n=0}^{N} \lambda_n \sin\left(\frac{n\pi\vartheta}{\ell}\right) = f(\vartheta)$$
[endliche Linearkombination von Harmonischen]
ist gegeben. Die Funktion f ist 2ℓ-periodisch und ungerade, also ex. nach Dirichlet $\vec{b}$ mit
$$f(\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi\vartheta}{\ell}\right)$$

Sind diese Koeffizienten b_n identisch mit λ_n?

Antwort: Ja!

Beh. $b_m = \lambda_m$. $\quad f(\vartheta) = \sum_{m=0}^{N} \lambda_m \sin\left(\frac{m\pi\vartheta}{l}\right)$

$$b_m = \frac{1}{l}\int_0^{2l} \sin\left(\frac{m\pi\vartheta}{l}\right) f(\vartheta)\, d\vartheta$$

$$= \frac{1}{l}\int_0^{2l} \sin\left(\frac{m\pi\vartheta}{l}\right) \sum_{k=0}^{N} \lambda_k \sin\left(\frac{k\pi\vartheta}{l}\right) d\vartheta$$

[Da die Summe endlich ist, dürfen wir $\sum$ und $\int$ vertauschen:]

$$= \frac{1}{l}\sum_{k=0}^{N} \lambda_k \boxed{\int_0^{2l} \sin\left(\frac{m\pi\vartheta}{l}\right)\cdot \sin\left(\frac{k\pi\vartheta}{l}\right) d\vartheta}$$

Integral über Produkt von zwei Sinusfunktionen.

BRON-
STEIN

Integrale trigonometrischer Funktionen[1])

Integrale, die die Sinusfunktion enthalten

274. $\int \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax.$

275. $\boxed{\int \sin^2 ax \, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4a} \sin 2ax.}$

276. $\int \sin^3 ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax + \frac{1}{3a} \cos^3 ax.$

277. $\int \sin^4 ax \, dx = \frac{3}{8} x - \frac{1}{4a} \sin 2ax + \frac{1}{32a} \sin 4ax.$

304. $\int \frac{dx}{1 - \sin^2 ax} = \int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a} \tan ax.$

305. $\boxed{\int \sin ax \sin bx \, dx = \frac{\sin (a-b) x}{2(a-b)} - \frac{\sin (a+b) x}{2(a+b)}}$ $(|a| \neq |b|$; für $|a| = |b|$ siehe Nr. 275).

306. $\int \frac{dx}{b + c \sin ax} = \frac{2}{a\sqrt{b^2 - c^2}} \arctan \frac{b \tan ax/2 + c}{\sqrt{b^2 - c^2}}$ (für $b^2 > c^2$),

$= \frac{1}{a\sqrt{c^2 - b^2}} \ln \frac{b \tan ax/2 + c - \sqrt{c^2 - b^2}}{b \tan ax/2 + c + \sqrt{c^2 - b^2}}$ (für $b^2 < c^2$).

Wir wollten ausrechnen.

$$\int_0^{2l} \sin\left(\frac{n\pi\vartheta}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi\vartheta}{l}\right) d\vartheta$$

Fall 1 $n = k$

$$= \left[\frac{1}{2}\vartheta - \underbrace{\frac{1}{4\frac{n\pi}{l}} \sin 2\frac{n\pi}{l}\vartheta}_{=0 \text{ falls } \vartheta = 0, 2l}\right]_0^{2l}$$

$$= \frac{1}{2} 2l - \frac{1}{2} \cdot 0 = l.$$

Fall 2 $\quad m \neq k$

$$\left[\frac{1}{2\frac{(m-k)\pi}{l}} \sin\left(\frac{(m-k)\pi\vartheta}{l}\right) - \frac{1}{2\frac{(m+k)\pi}{l}} \sin\left(\frac{(m+k)\pi\vartheta}{l}\right)\right]_0^{2l}$$

$$= 0$$

Zusammenfassend:

Wir erhalten, daß sich genau die Terme wegheben, so daß

$$\lambda_m = b_m :$$

$$\boxed{b_m = \frac{1}{l} \sum_{m=0}^{N} \lambda_m \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{m\pi\vartheta}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi\vartheta}{l}\right) d\vartheta}_{\substack{= l \text{ falls } m = k \\ = 0 \text{ falls } m \neq k}} = \frac{1}{l} \lambda_m l = \lambda_m.}$$

Also ist das Fourierspektrum von $\sum_{m=0}^{N} \lambda_m \sin\left(\frac{m\pi\vartheta}{l}\right)$ gerade $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_N)$.